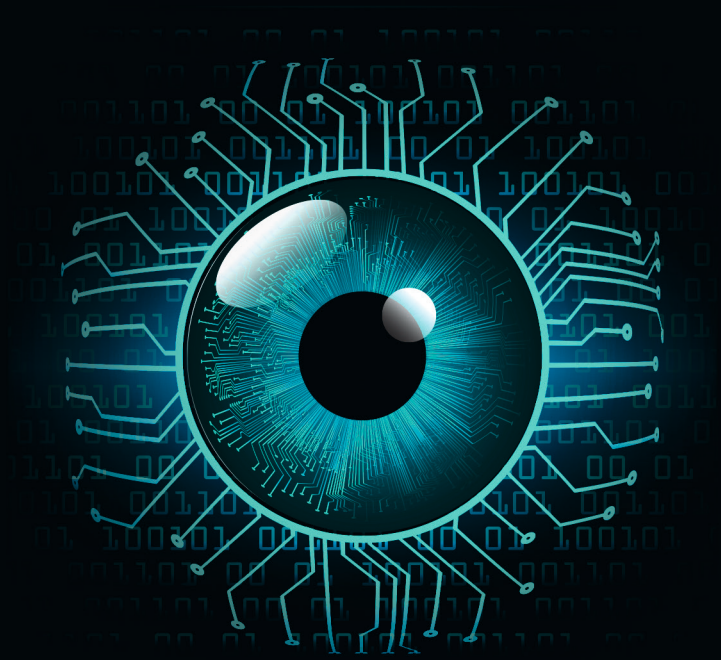


uwe **LÄMMEL**
jürgen **CLEVE**

5., überarbeitete Auflage

KÜNSTLICHE INTELLIGENZ

Wissensverarbeitung – Neuronale Netze

HANSER

Lämmel / Cleve

Künstliche Intelligenz

Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Unser **Computerbuch-Newsletter** informiert Sie monatlich über neue Bücher und Termine. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter:

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Uwe Lämmel

Jürgen Cleve

Künstliche Intelligenz

Wissensverarbeitung – Neuronale Netze

5., überarbeitete Auflage

Mit zahlreichen Bildern und Tabellen

HANSER

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Uwe Lämmel
Lehrgebiet Grundlagen der Informatik / Künstliche Intelligenz
Hochschule Wismar

Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Cleve
Lehrgebiet Grundlagen der Informatik / Künstliche Intelligenz
Hochschule Wismar

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.
Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2020 Carl Hanser Verlag München
Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Titelmotiv: © shutterstock.com/Titima Ongkantong
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Satz: Jürgen Cleve, Uwe Lämmel
Grafik: Annabelle Witton
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-45914-4
E-Book-ISBN 978-3-446-46363-9

Vorwort

Dieses Buch über künstliche Intelligenz richtet sich an Leser mit natürlicher Intelligenz. Es ist ausdrücklich ein Lehrbuch und kein allumfassendes Fachbuch. Das Buch bietet einen Einstieg in die Grundlagen der künstlichen Intelligenz. Dabei werden sowohl die klassische *symbolverarbeitende künstliche Intelligenz* als auch *konnektionistische Ansätze* wie die künstlichen neuronalen Netze behandelt.

Das Buch wendet sich an Einsteiger, die sich in das Gebiet der künstlichen Intelligenz einarbeiten wollen, sei es nun im Rahmen einer Lehrveranstaltung oder als Autodidakt. Das Buch kann als Grundlage für eine einführende Lehrveranstaltung in das Gebiet der künstlichen Intelligenz verwendet werden. Der Schwerpunkt liegt hier auf „einführend"; für angehende Spezialisten hoffen wir, die eine oder andere Anregung zur einfachen Darstellung des einen oder anderen Sachverhaltes geben zu können. Studenten an Hochschulen, die sich der Informatik widmen – sei es im Hauptfach, im Nebenfach oder in der Magisterausbildung – möge dieses Buch als Lektüre zur Wissensaneignung dienen. Wir wenden uns auch an Informatik-Lehrer der Gymnasien. Das Gebiet der künstlichen Intelligenz bietet zahlreiche Ansätze, die durchaus mit interessierten Schülern in Angriff genommen werden können. Wir würden es sehr begrüßen, wenn bereits in der Schule eine Einführung in die (Aussagen-)Logik im Rahmen des Mathematik-, des Informatik- oder des Philosophie-Unterrichts erfolgen würde.

Fast zwei Jahrzehnte sind seit dem Erscheinen der ersten Auflage vergangen. Unser Konzept, die Techniken der klassischen künstlichen Intelligenz gemeinsam mit künstlichen neuronalen Netzen in einem Buch darzustellen, ist aufgegangen. Die Struktur des Buches hat etliche Nachahmer gefunden.

1 Künstliche Intelligenz

- Symbolverarbeitende künstliche Intelligenz
  - 2 Darstellung und Verarbeitung von Wissen
  - 3 Problemlösung mittels Suche
  - 4 PROLOG
- Künstliche neuronale Netze – Konnektionismus
  - 5 Künstliche neuronale Netze
  - 6 Vorwärtsgerichtete neuronale Netze
  - 7 Wettbewerbslernen
  - 8 Autoassoziative Netze
  - 9 Entwicklung neuronaler Netze

Nach einer Diskussion der Begriffe steht die *symbolverarbeitende künstliche Intelligenz* im Fokus der Kapitel 2-4. Die erste Hälfte des Buches schließt mit einer Einführung in die Sprache PROLOG, mit der nach wie vor Wissensverarbeitung am schnellsten praktisch ausprobiert werden kann. Dieser Teil der KI wird auch als *White-Box-KI* bezeichnet, denn hier ist die Verarbeitung transparent und durch das System erklärbar.

In der zweiten Hälfte des Buches (Kapitel 5-9) werden *künstliche neuronale Netze* vorgestellt. Der zweite Teil schließt ebenso mit der praktischen Anwendung: Künstliche neuronale Netze werden programmiert beziehungsweise mittels Software-Systemen entwickelt. Die künstlichen neuronalen Netze fallen in die Kategorie *Black-Box-KI*, da man zwar weiß, wie sie funktionieren, eine Erklärung für die Entstehung eines Resultats für den Nutzer nicht oder nur eingeschränkt möglich ist.

Einige klassische Techniken der KI sind in den vergangenen Jahren wieder in den Blickpunkt gerückt: Unter der Bezeichnung *Business Rules* (Geschäftsregeln) wird die regelbasierte Wissensdarstellung und -verarbeitung in betrieblichen Anwendungssystemen mit dem Ziel eingesetzt, die Geschäftslogik sowie die Kundenbeziehungen flexibler handhaben zu können. Für die Entwicklung und den Einsatz derartiger intelligenter Komponenten stehen Business-Rules-Management-Systeme zur Verfügung, die als moderne Expertensysteme angesehen werden können. Wissensmanagement ist bereits längere Zeit ein Thema und das nicht nur im betriebswirtschaftlichen Umfeld. *Wissensnetze* mit dem Ziel, durch eine inhaltliche semantische Suche Wissen schnell verfügbar zu machen, basieren auf den Techniken der Frames und der semantischen Netze. Leistungsfähige Produkte nutzen darüber hinaus das Konzept der Topic Maps, Wissen und Information anschaulich in ihren Beziehungen darzustellen.

Ebenso sind neuronale Netze durch spektakuläre Ergebnisse erneut in den Fokus vieler Anwendungen getreten. Das *Deep Learning* der neuronalen Netze führt die Möglichkeiten bei der Objekt-, Muster- oder Spracherkennung auf eine neue Stufe.

Bewusst konzentrieren wir uns auf die Basis-Techniken der KI. Wir stellen Grundlagen dar, mit denen KI-Anwendungen konzipiert und umgesetzt werden können. Im Vordergrund steht, mit welchen Mitteln, also *wie* KI-Anwendungen entwickelt werden, nicht *welche Leistungskraft* KI heute hat oder morgen haben wird. Nicht zuletzt deshalb nutzen wir weiterhin die Programmiersprache *PROLOG*, die sich als Logik-basierte Sprache sehr gut eignet, die Grundprinzipien der Modellierung und Lösung von Problemen mittels expliziter Wissensdarstellung zu erfahren. Mit dem *JavaNNS* können wir ganz genau in die Struktur und in die Arbeitsweise künstlicher neuronaler Netze hineinschauen. Wir zeigen aber auch, wie neuronale Netze mittels der Sprache Python aufgebaut werden können.

Zum Buch halten wir eine Webseite bereit: *http://www.wi.hs-wismar.de/ki-buch*. Dort findet der Leser Programmtexte oder Lösungen zu einigen Beispielen, Verweise auf verwendete Software sowie Demo-Programme. Zudem sammeln wir dort weitere Quellen zum Thema künstliche Intelligenz. Den Wunsch nach Musterlösungen werden wir auch weiterhin nur zum Teil erfüllen. Nach wie vor stehen wir jedoch gern für Fragen und für die Bewertung von Lösungen oder Lösungsansätzen zur Verfügung. Scheuen Sie sich nicht, mit uns in Kontakt zu treten. Wir halten dieses Vorgehen für erfolgreicher als das schnelle Nachschlagen einer Musterlösung.

Wir möchten uns bei allen bedanken, die uns auf Fehler aufmerksam gemacht oder Hinweise gegeben haben. Uns ist bewusst, dass es wohl wieder oder immer noch den einen oder anderen Fehler zu entdecken gibt. Seien Sie also weiter so kritisch wie bisher.

Wir danken Frau Natalia Silakova-Herzberg für die gute Betreuung während der Erstellung des Buchs und Frau Annabelle Witton für die Erstellung einiger Grafiken.

Wismar, März 2020 Uwe Lämmel, Jürgen Cleve

Inhalt

1 Künstliche Intelligenz 7

1.1 Eine intelligente Maschine 7
1.2 Intelligenz und künstliche Intelligenz 9
1.3 Knobelaufgaben und symbolverarbeitende KI 15
1.4 Geschichte der KI 17
1.5 Wir und die KI 19

Symbolverarbeitende KI

2 Darstellung und Verarbeitung von Wissen 23

2.1 Wissen und Wissensarten 23
2.2 KI und explizite Wissensdarstellung 25
2.3 Darstellung von Wissen mit Hilfe von Logik 28
2.3.1 Aussagenlogik 29
2.3.2 Prädikatenlogik 46
2.3.3 Logik und PROLOG 60
2.4 Regelbasierte Wissensdarstellung 65
2.4.1 Vorwärtsverkettung 68
2.4.2 Rückwärtsverkettung 71
2.4.3 Regelverarbeitung und PROLOG 73
2.4.4 Business Rules 75
2.5 Semantische Netze und Frames 81
2.5.1 Semantische Netze 81
2.5.2 Frames 83
2.5.3 Wissensnetze 85
2.6 Vages Wissen 87
2.6.1 Unsicheres Wissen 88
2.6.2 Fuzzy-Mengen 97
2.6.3 Fuzzy-Logik 103
2.6.4 Fuzzy-Regler 105

3 Problemlösung mittels Suche 111
3.1 Suche in Graphen 111
3.2 Uninformierte Suche 116
3.3 Heuristische Suche 125
3.3.1 Heuristik des nächsten Nachbarn 130
3.3.2 Bergsteiger-Strategie 131
3.3.3 Bestensuche 132
3.3.4 A*-Suche 133
3.4 Das Rundreiseproblem 137

4 PROLOG 147
4.1 Logisches Programmieren 147
4.1.1 Erste Schritte 147
4.1.2 Ein Beispiel 149
4.1.3 Regeln 151
4.2 PROLOG-Programme 156
4.2.1 Lösungsfindung mittels Backtracking 156
4.2.2 Parameterübergabe mittels Unifikation 158
4.2.3 Interpretation von Programmen 161
4.3 Datentypen und Arithmetik 163
4.3.1 Einfache und zusammengesetzte Datentypen 163
4.3.2 Listen 165
4.3.3 Arithmetik 169
4.4 Steuerung der Abarbeitung 170
4.4.1 Reihenfolge der Klauseln 171
4.4.2 Reihenfolge der Literale im Körper einer Regel 172
4.4.3 Kontrolle des Backtracking 173
4.4.4 Die Negation 176
4.5 Vordefinierte Prädikate 177
4.6 Beispielprogramme 178
4.6.1 Das Einfärben einer Landkarte 178
4.6.2 Die Türme von Hanoi 179
4.6.3 Das Acht-Damen-Problem 181
4.6.4 Das Problem der stabilen Paare 183
4.6.5 Das Einstein-Problem 184

Neuronale Netze

5 Künstliche neuronale Netze 189
5.1 Das künstliche Neuron 191
5.2 Architekturen 196
5.3 Arbeitsweise 198

6 Vorwärtsgerichtete Netze 203
6.1 Das Perzeptron 203
6.1.1 Die Delta-Regel 205
6.1.2 Musterzuordnungen 208
6.2 Backpropagation-Netze 211
6.2.1 Das Backpropagation-Verfahren 212
6.2.2 Das XOR-Backpropagation-Netz 216
6.2.3 Modifikationen des Backpropagation-Algorithmus 219
6.3 Typische Anwendungen 222
6.3.1 Zeichenerkennung 222
6.3.2 Das Encoder-Decoder-Netz 228
6.3.3 Ein Prognose-Netz 229
6.4 Datenvorverarbeitung 233
6.4.1 Verarbeitungsschritte 233
6.4.2 Daten des Kreditvergabe-Beispiels 236
6.5 Netzgröße und Optimierungen 240
6.5.1 Die Größe der inneren Schicht 241
6.5.2 Das Entfernen von Verbindungen 243
6.5.3 Genetische Algorithmen 244
6.6 Partiell rückgekoppelte Netze 247
6.6.1 Jordan-Netze 248
6.6.2 Elman-Netz 250
6.7 Convolutional Neural Network 252

7 Wettbewerbslernen 261
7.1 Selbstorganisierende Karte 262
7.1.1 Architektur und Arbeitsweise 262
7.1.2 Das Training 265
7.1.3 Visualisierung einer Karte und deren Verhalten 268
7.1.4 Eine Lösung des Rundreiseproblems 269

7.2 Neuronales Gas 274
7.2.1 Architektur und Arbeitsweise 275
7.2.2 Wachsendes neuronales Gas 277
7.3 Adaptive Resonanz-Theorie 280
7.3.1 Das Plastizitäts-Stabilitäts-Dilemma 280
7.3.2 Struktur eines ART-Netzes 281
7.3.3 Das Beispiel Würfelmuster 283
7.3.4 Arbeitsweise 285

8 Autoassoziative Netze 289
8.1 Hopfield-Netze 289
8.1.1 Arbeitsweise 290
8.1.2 Wiedererkennung von Mustern 292
8.1.3 Energie-Niveau eines Netzes 296
8.2 Lösung von Optimierungsproblemen 297
8.3 Die Boltzmann-Maschine 300

9 Entwicklung neuronaler Netze 305
9.1 Datenanalyse-Software 305
9.2 JavaNNS 307
9.3 Implementation neuronaler Netze 309
9.3.1 Einsatz von Array-Datenstrukturen 310
9.3.2 Der objektorientierte Ansatz 311
9.4 Implementieren mit TensorFlow 321

Literatur 329

Index 332

1 Künstliche Intelligenz

Kein anderes Gebiet der Informatik löst solch emotionsgeladene Diskussionen aus wie das Gebiet mit dem Namen „künstliche Intelligenz“. Vielleicht hätte eine andere Übersetzung des Begriffes „Artificial Intelligence“ die Inhalte des Fachgebietes besser getroffen: „gekünstelte Intelligenz“, „maschinelle Intelligenz“ oder „ synthetische Intelligenz“ wecken möglicherweise weniger Assoziationen zu einem künstlichen Wesen, welches die Menschheit beherrscht.

In diesem Kapitel beginnen wir mit dem berühmten Turing-Test, diskutieren dann die Begriffe *Intelligenz* sowie *künstliche Intelligenz* und schauen auf die künstliche Intelligenz (KI) als ein Teilgebiet der Informatik. Anhand einer Knobelaufgabe stellen wir einen typischen Ansatz der symbolverarbeitenden KI vor. Ein Blick in die Geschichte der KI sowie deren gesellschaftliche Wirkung schließen diese Einführung ab.

1.1 Eine intelligente Maschine

In den letzten Jahren hat die Debatte über die künstliche Intelligenz die Medien erreicht und die Diskussionen in der Öffentlichkeit angeheizt. So liest man Überschriften wie:

- „Die künstliche Intelligenz findet: Menschen verhalten sich seltsam“,
- „Ist das menschliche Gehirn ein Auslaufmodell? Künstliche Intelligenz könnte uns Menschen bald überflügeln“,
- „Ein autonom fahrendes Auto erkennt bei Nacht kein Wildschwein“,
- „Künstliche Intelligenz – Wann übernehmen die Maschinen?“ oder
- „2062: Das Jahr, in dem die künstliche Intelligenz uns ebenbürtig sein wird“.

Der Begriff *künstliche Intelligenz* (KI) weckt einige Fragen:

- Können Maschinen denken oder werden Maschinen eines Tages denken können?
- Wird es intelligente Maschinen geben?
- Wie agieren intelligente Maschinen in unserem Umfeld beziehungsweise in unserer Gesellschaft?
- Wie wird die künstliche Intelligenz unser Leben beeinflussen?

Wollen wir uns mit derartigen Fragen befassen, müssen wir zuerst die Begriffe klären:

- Was ist eine Maschine?
- Was ist Intelligenz?
- Was bedeutet Denken?
- Was ist künstliche Intelligenz?

Noch bevor überhaupt das Gebiet der künstlichen Intelligenz entstand, schlug bereits Anfang der 50er-Jahre der Mathematiker *Alan Turing* einen Test vor, mit dem das intelligente Verhalten eines Computers geprüft werden kann. Alan Turing beschreibt das Experiment unter dem Namen „Imitation Game“ wie folgt:

„*It is played with three people, a man (A), a woman (B), and an interrogator (C) who may be of either sex. The interrogator stays in a room apart front the other two. The object of the game for the interrogator is to determine which of the other two is the man and which is the woman. He knows them by labels X and Y, and at the end of the game he says either 'X is A and Y is B' or 'X is B and Y is A'.*“ [Tur50]

Wir haben es also mit drei Personen zu tun: einer Frau B, einem Mann A und einem Fragesteller oder einer Fragestellerin C. C ist alleine in einem Raum und kommuniziert nur per Textnachrichten mit A und B. C kennt seine Mitspieler nur als X beziehungsweise Y. Am Ende des Spiels entscheidet C, ob X weiblich (B) oder männlich (A) ist. Das Erkennen der Personen wird zusätzlich dadurch erschwert, dass der Mann A verhindern will, dass C ihn erkennt. Die Spielerin B will dagegen dem Fragesteller C helfen, die richtige Antwort zu finden.

Dieses Spiel sieht Turing als Vorstufe für ein Experiment, in dem die Rolle von A (oder B) von einem Computerprogramm übernommen wird. Diese Form des *Imitation Games* wird nach seinem Erfinder *Turing-Test* genannt:

Eine Person C kommuniziert mittels Textnachrichten mit zwei Partnern X beziehungsweise Y. Beteiligt sind eine Software A und ein Mensch B. Kann C zweifelsfrei entscheiden, wer der menschliche Partner ist und wo die Software antwortet? Falls dies nicht möglich ist, muss dem Computerprogramm wohl ein intelligentes Verhalten in der Konversation zugesprochen werden.

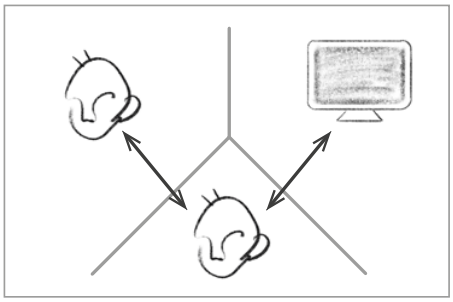


Bild 1.1 Der Turing-Test

Alan Turing war bereits mit der nach ihm benannten Turing-Maschine Mitte der 30er Jahre des 20. Jahrhunderts der tatsächlichen Entwicklung weit voraus: Mit Hilfe seines theoretischen Maschinenmodells konnte der Begriff Berechenbarkeit definiert werden, bevor die ersten programmierbaren Rechenautomaten überhaupt tatsächlich etwas berechnen konnten. Mit dem Imitation Game war Alan Turing erneut der Zeit weit voraus: Lange bevor die ersten Programme einen Textdialog führen konnten, war das nun Turing-Test genannte Spiel in der Lage, das intelligente Gesprächsverhalten einer Maschine zu prüfen.

Seit Anfang der 90er Jahre wird jährlich ein Preis ausgeschrieben, der im Rahmen eines Wettbewerbs das beste Programm eines Turing-Tests auszeichnet, der sogenannte *Loebner Prize*. Die an diesem Test teilnehmenden Programme sind auf das Sprachverstehen, konkreter auf

das Verstehen geschriebener Worte, und ein allgemeines Weltwissen spezialisiert, wie man den veröffentlichten Dialogen entnehmen kann. Wir kommen auf die Gewinner dieses Wettbewerbs später noch einmal zurück.

1.2 Intelligenz und künstliche Intelligenz

Es wird viel über die künstliche Intelligenz geschrieben und geredet, aber zu oft bleibt eine Erklärung der benutzten Begriffe aus. Was ist künstliche Intelligenz?

Eine Erklärung oder eine Definition fällt schwer, da bereits der Begriff der Intelligenz nicht klar definiert ist. Wir greifen hier auf einige kurze Erklärungen aus allgemeinen Lexika zurück. Im Gabler Wirtschaftslexikon wird Intelligenz als Eigenschaft eines Menschen beschrieben:

„*in der Psychologie ein hypothetisches Konstrukt (d.h. eine Erklärung für ein nicht direkt beobachtbares Phänomen), das die erworbenen kognitiven Fähigkeiten und Wissensbestände einer Person bezeichnet, die ihr zu einem gegebenen Zeitpunkt zur Verfügung stehen.*“ [Mai18]

Im Duden wird der Mensch schon eingeklammert, um anzudeuten, dass es Intelligenz außerhalb des Menschen gibt oder geben kann: „*Fähigkeit [des Menschen], abstrakt und vernünftig zu denken und daraus zweckvolles Handeln abzuleiten.*“ [Dud19]

Aus beiden Definitionen kann keine scharfe Trennung zwischen „besitzt Intelligenz“ oder „ist intelligent“ und „besitzt keine Intelligenz“ abgeleitet werden. Wir kennen den Intelligenzquotienten, der zumindest darauf hindeutet, dass es unterschiedliche Stufen von Intelligenz gibt. Legt man die Definition der Encyclopaedia Britannica zugrunde, so lassen sich schon eher als in den obigen Definitionen verschiedene Stufen des Wahrnehmens, Reagierens und Handelns erkennen: “*Intelligence, mental quality that consists of the abilities to learn from experience, adapt to new situations, understand and handle abstract concepts, and use knowledge to manipulate one's environment.*“ [Ste17]

Menschen oder andere Wesen können im unterschiedlichen Maße aus Erfahrungen lernen, sich an neue Situationen anpassen, abstrakte Konzepte verstehen und bearbeiten und ihr Wissen einsetzen, um die Umgebung zu verändern.

Etwas ausführlicher beschreiben einige Modelle den Begriff Intelligenz unter Nutzung von Faktoren. Zum Beispiel legt Thurston (1938) die folgenden sogenannten Primärfaktoren für die Einschätzung von Intelligenz zugrunde, vgl. [Paw16]:

- Sprachverständnis,
- Wortflüssigkeit,
- Rechenfertigkeit,
- Raumvorstellung,
- Gedächtnis,
- Wahrnehmungsgeschwindigkeit,
- schlussfolgernd-logisches Denken.

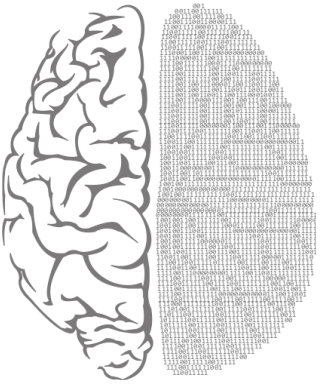
Diese Faktoren und die vorher genannten Eigenschaften des Lernens aus Erfahrung, des Verstehens abstrakter Konzepte und die Anwendung zur Manipulation der Umgebung werden wir als Kriterien oder Maßstäbe für die Charakterisierung einer künstlichen Intelligenz einsetzen.

In einigen Definitionen der künstlichen Intelligenz (KI) wird der Mensch als Maßstab herangezogen:

„In der KI wird untersucht, wie man intelligentes Verhalten von Computern erfassen und nachvollziehen lassen kann oder wie man allgemein mit Hilfe von Computern Probleme löst, die Intelligenzleistungen voraussetzen.“ [CS06]

„Künstliche Intelligenz soll Maschinen in die Lage versetzen, menschliche Tätigkeiten zu übernehmen. Dabei soll das menschliche Gedächtnis, sein Lernverhalten und seine Entwicklung nachgebildet werden.“ [Fel19]

„Erforschung ‚intelligenten‘ Problemlösungsverhaltens sowie die Erstellung ‚intelligenter‘ Computersysteme. Künstliche Intelligenz (KI) beschäftigt sich mit Methoden, die es einem Computer ermöglichen, solche Aufgaben zu lösen, die, wenn sie vom Menschen gelöst werden, Intelligenz erfordern.“ [Sie18]



Es sind bereits viele Computerprogrammen bekannt, die Aufgaben, für deren Lösung im Allgemeinen Intelligenz notwendig ist, besser oder sogar schneller lösen können als ein Mensch:

Das Navigationsgerät plant eine Route unter Berücksichtigung von Randbedingungen (keine Autobahn) und Zielkriterien (kürzeste Verbindung). Derartige Programme enthalten Suchstrategien, die dem Gebiet der künstlichen Intelligenz entstammen. Übersetzungsprogramme liefern für die alltägliche Umgangssprache gute Lösungen. Diagnosesysteme sind teilweise treffsicherer in ihren Diagnosen als mancher Experte. So einleuchtend die Definition im Vergleich zu einer menschlichen Leistung auch klingen mag, so leicht kann sie angegriffen werden.

Ein Taschenrechner kann zwar große Zahlen multiplizieren aber KI ist dies sicherlich nicht.

Alternativ wurde die künstliche Intelligenz durch das Aufzählen der Arbeitsgebiete charakterisiert: *„Teildisziplin der Informatik, die so unterschiedliche Problembereiche wie Bildverarbeitung, Robotik, Fließtext- und Spracherkennung, mechanische Beweise und anderes umfasst und auch die Konstruktion von wissensbasierten Systemen einschließt.“* [HR92]

Wir sehen hier eine Weiterentwicklung der Anwendungsbereiche eines Computers: Gestartet als Rechenmaschine – *number cruncher* – wurde der Computer weiterentwickelt, um Texte und Grafiken verarbeiten zu können. Dies jedoch stets als Werkzeug des Menschen, als sein „verlängerter Arm“.

Nun wird der Computer befähigt zu erkennen, zu denken und zu entscheiden, also Schlussfolgerungen zu ziehen. Versehen mit einer Körperlichkeit und den Fähigkeiten, nicht nur Bilder aufzunehmen, sondern Bilder zu erkennen und daraus Handlungen abzuleiten, entsteht ein künstliches Wesen. Ob dieses intelligent ist oder nicht, welcher „Intelligenzstufe“ es entspricht, der einer Krähe, eines Hundes oder der eines Menschen, muss anhand weiterer Kriterien entschieden werden.

Fragen wir doch einmal A.L.I.C.E., einen Chatbot, der vor einigen Jahren den Loebner-Preis im Turing-Test-Wettbewerb gewonnen hat:

Beispiel 1.1 Chatbot A.L.I.C.E.

Good morning!

```
Hello and how are you this morning?
```

How old are you?

```
I'm Eighteen in computer years.
```

Are you smart?

```
Yes. I am highly intelligent.
```

How much is 4+3?

```
Is this a math question?
```

yes.

```
I'm not too good in arithmetic.
```

Please try to calculate 4+3.

```
Wow you are very polite.
OK I will try to calculate 4+3.
```

I mean 4 plus 3.

```
Oh I get it.
Thanks for explaining that.
Use a calculator!
```

What is intelligence?

```
Intelligence is the computational part of the
ability to achieve goals in the world.
Varying kinds and degrees of intelligence occur in
people, many animals and some machines.
```

What is artificial intelligence?

```
Artificial Intelligence is the branch of engineering
and science devoted to constructing machines that think.
Searching... Searching...
Please stand by.
```

Thank you.

```
You are quite welcome.
```

Eine Weiterentwicklung stellt die Software Mitsuku[1] dar, die den Loebner-Preis in den Jahren 2016 bis 2019 gewonnen hat, siehe Bild 1.2 auf der nächsten Seite. Auch hier wird die KI als Teilgebiet der Informatik an erster Stelle gesehen.

Es sind somit zwei Perspektiven, aus denen sich der Begriff der künstlichen Intelligenz betrachten lässt:

1. KI als Wissenschaftsdisziplin, im Wesentlichen ein Teilgebiet der Informatik und
2. KI als Ergebnis der Forschungen dieser Wissenschaftsdisziplin. Hierbei sind mehrere Interpretationen möglich:
   (a) KI als Sammelbegriff für verschiedene Techniken wie regelbasierte Wissensdarstellung und -verarbeitung, Wissensnetze oder künstliche neuronale Netze,
   (b) KI als eine intelligent agierende Software beziehungsweise Maschine,
   (c) KI als das künstliche intelligente Wesen.

[1] https://www.pandorabots.com/mitsuku/

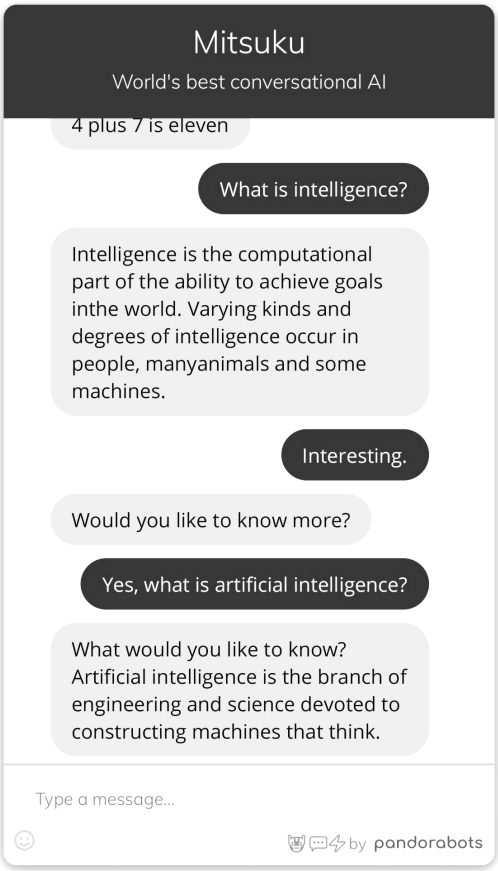


Bild 1.2 Mitsuku und die Intelligenz

Definition 1.1 Künstliche Intelligenz

Der Begriff *künstliche Intelligenz* wird gemäß den Perspektiven unterschiedlich definiert:

1. KI ist eine Wissenschaftsdisziplin der Informatik, die sich mit der Entwicklung von Hard- und Software-Systemen befasst, die Probleme lösen können, für deren Lösung gemeinhin Intelligenz erforderlich ist.
2. Als KI werden KI-Techniken bezeichnet, die in Hard- oder Softwaresystemen für die Leistungssteigerung eingesetzt werden.
3. KI ist ein Hard- und Softwaresystem, welches ein intelligentes Problemlösungsverhalten zeigt.
4. Als KI wird ein künstliches Wesen bezeichnet, welches Intelligenz besitzt.

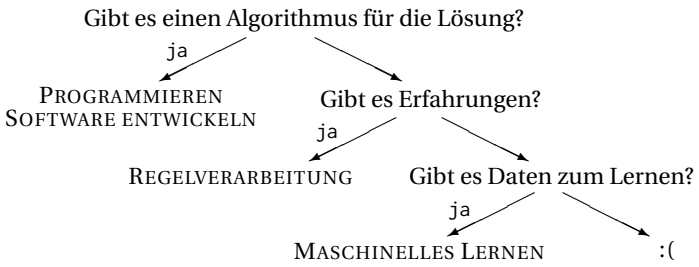


Bild 1.3 Einsatzgebiete der künstlichen Intelligenz

Nun können wir die vorher angeführten Intelligenzfaktoren ([Paw16]) heranziehen und ein erstes Bild der KI im Sinne der Definitionen 3 und 4 zeichnen:

Sprachverständnis
Die bereits diskutierten Dialogprogramme oder Chatbots verfügen über ein bestimmtes Sprachverständnis, da diese sehr oft semantisch korrekt auf Aussagen eines menschlichen Dialogpartners reagieren können. Sprach-Assistenten wie Cortana, Siri oder Alexa „verstehen" Befehle und veranlassen deren Ausführung. Sprachverständnis ist zwar noch nicht allumfassend, aber bereits in Ansätzen vorhanden.

Wortflüssigkeit
Diese Eigenschaft geht mit dem Sprachverständnis einher. Chatbots reagieren unterschiedlich auf ein und dieselbe Aussage oder Frage eines Dialogpartners, der Wortschatz ist breit und wird abwechslungsreich eingesetzt.

Rechenfertigkeit
Hier haben wir es mit der Basiskompetenz eines Software-Systems zu tun: Rechnen, Zahlen-„Verarbeitung" ist der allererste Einsatzzweck von Computern. Die Rechenleistung übersteigt die des Menschen bei Weitem.

Raumvorstellung
Die selbstständige Orientierung im Raum ist für Hardware-Systeme, also Roboter, eine schwierige Aufgabe, die entsprechende Leistung in der Bilderkennung voraussetzt. Service-Roboter können sich in Räumen orientieren, Fahrassistenzsysteme steuern autonom das Fahrzeug durch die Straßen, Fußballroboter erkennen nicht nur Ball und Spielfläche, sondern können als Mannschaft kollektiv agieren. Raumvorstellungen können den Systemen vermittelt werden.

Gedächtnis
Das Wiedergeben von Fakten ist genau genommen keine Intelligenzleistung, sondern nur eine Gedächtnisleistung. Das Gedächtnis, der Speicher, heutiger Datenbanken ist um ein Vielfaches größer als ein menschliches Gedächtnis. Der Zugriff auf zum Beispiel Wikipedia und eine entsprechende Textanalyse erschließt das kollektive Gedächtnis der Menschheit. Speichern und Wiedergeben ist eine Grundeigenschaft der Software-Systeme. Diese Leistung ist deutlich größer als beim Menschen.

Wahrnehmungsgeschwindigkeit
Diese Eigenschaft ist schwer zu beurteilen. Die Erkennung von Objekten, insbesondere von mehreren Objekten, in Echtzeit ist zwar einerseits als gelöst zu betrachten, wenn wir beispielsweise die Systeme des autonomen Fahrens betrachten.

Andererseits ist die Objekterkennung in Echtzeit nach wie vor eine Herausforderung. Menschen können sehr viele unterschiedliche Objekte, auch in eher ungewöhnlichen Umgebungen, sehr schnell wahrnehmen und erkennen. Systeme benötigen derzeit noch ein objektbezogenes Training.

Schlussfolgernd-logisches Denken
Ein Theoretiker wird zuerst die Frage stellen: Welche Logik wird hier zugrunde gelegt? Handelt es sich um eine formale Logik, wie die Aussagenlogik, der Prädikatenkalkül, die Fuzzy-Logik oder andere mathematisch fundierte Logiken, so kann ein Software-System damit arbeiten. Diagnosesysteme nutzen Prädikaten- oder Fuzzy-Logik oder setzen Sicherheitsfaktoren ein, um unscharfe und unsichere Situation besser abbilden zu können. Maschinen können logisch denken!

Psychologen sind wir nicht, deshalb ziehen wir die Strukturdefinition der Intelligenz mittels Intelligenzfaktoren nicht in Zweifel.

Für die Einschätzung von künstlicher Intelligenz sehen wir jedoch zudem Eigenschaften wie Lernfähigkeit, Abstraktionsvermögen oder Kreativität als entscheidende Kriterien.

Nach dem Gabler Wirtschaftslexikon *„bezeichnet [Kreativität] i.d.R. die Fähigkeit eines Individuums oder einer Gruppe, in phantasievoller und gestaltender Weise zu denken und zu handeln.“* [Möh18]

Können alle obigen Intelligenzfaktoren durchaus auch in heutigen KI-Systemen gefunden werden, so ist trotz einiger Ansätze Kreativität in derzeitigen Systemen nur sehr beschränkt auszumachen.

Allgemein unterstützen Computerprogramme den Menschen bei der Bewältigung seiner Aufgaben, sie müssen folglich an seine Forderungen und Wünsche angepasst werden. In vielen Anwendungen wird mit der Untersuchung der menschlichen Tätigkeit begonnen, um diese dann durch den Einsatz von Hard- und Software effizienter oder angenehmer zu gestalten.

Das Messen am Menschen ist somit keine Besonderheit der künstlichen Intelligenz. Die Besonderheit liegt darin, dass man die Fähigkeiten des Menschen zum Denken, zum Lernen aus Beispielen oder allgemein die Fähigkeiten zum Problemlösen nachbilden will, um eine Leistungssteigerung des Computers zu erzielen. Im vorliegenden Buch werden für den KI-Einsteiger die grundlegenden Techniken vorgestellt und Anwendungen anhand einfacher und nachvollziehbarer Problemstellungen aufgezeigt. Behandelt werden dabei sowohl die klassische künstliche Intelligenz – die symbolverarbeitende KI – als auch konnektionistische KI wie die neuronalen Netze.

Die symbolverarbeitende KI geht von einer expliziten Darstellung des Wissens im Allgemeinen unter Nutzung logischer Konzepte aus. Dieser Teil der künstlichen Intelligenz wird als *symbolverarbeitend* bezeichnet, da Objekte und Subjekte benannt und im Computer durch Symbole repräsentiert. Auch ihre Eigenschaften, Beziehungen zwischen ihnen oder Ereignisse werden durch Symbole dargestellt. Das Wissen über ein Spezialgebiet und die Strategien zur Lösungsfindung werden vom Menschen (Entwickler) in das KI-System eingearbeitet. Das Programm kann dann durch die Verarbeitung des beschriebenen Wissens, durch eine Symbolverarbeitung, zu neuen Aussagen gelangen.

Diese klassische KI enthält eine Vielzahl von Teilgebieten. Im Zentrum unseres Buches stehen die Techniken aus den Bereichen der Wissensdarstellung und Wissensverarbeitung. Aufbauend auf der Wissensrepräsentation werden das Problemlösen durch Suchen sowie eine Programmiersprache der KI behandelt. Die logische Programmiersprache PROLOG erlaubt es, die

wesentlichen Ideen der symbolverarbeitenden KI einmal praktisch umzusetzen und ist zudem in einer freien Version verfügbar.

Die im Buch behandelten Themen decken bei weitem nicht das gesamte Gebiet der künstlichen Intelligenz ab. Spezielle Teilgebiete wie beispielsweise Teile des maschinellen Lernens oder der Verarbeitung natürlicher Sprache greifen (über die hier dargestellten Methoden hinaus) auf spezielle Formen der Wissensdarstellung wie beispielsweise verschiedene Grammatikarten zurück.

1.3 Knobelaufgaben und symbolverarbeitende KI

Knobelaufgaben, wie sie in Büchern oder Zeitschriften gestellt werden, können sehr gut zur Veranschaulichung der Vorgehensweise der klassischen KI herangezogen werden. Das zu lösende Problem bezieht sich auf einen kleinen Ausschnitt der realen Welt, der allen geläufig ist und keine Einführung in ein Spezialgebiet erfordert. Die Aufgabenstellung enthält üblicherweise Informationen in Form von Aussagen, die auf den ersten Blick unzureichend erscheinen. Aufgrund logischer Überlegungen, Schlussfolgerungen aus den Aussagen, erkennt man dann mehr oder weniger schnell unter Nutzung von Allgemeinwissen des Rätsels Lösung. Probieren wir es:

Beispiel 1.2 Wer programmiert in welcher Sprache?

In einer Firma arbeiten drei Freunde: ein C++-Programmierer, ein Java-Programmierer und ein Python-Programmierer. Ihre Namen sind Emil, Paul und Felix.
Der C++-Programmierer hat keine Geschwister (A); er ist der Jüngste der Freunde (B). Felix, der mit der Schwester von Emil verheiratet ist (C), ist älter als der Java-Programmierer (D).

Derartige Knobelaufgaben sind sehr gute Trainingssituationen für die Anwendung von Mitteln und Methoden der KI. Darüber hinaus sind sie praxisnäher, als sie auf den ersten Blick erscheinen. Auch eine praktische Aufgabenstellung bezieht sich stets auf einen kleinen Weltausschnitt. Das Wissen liegt häufig verbal formuliert vor und muss in eine formale Repräsentation übertragen werden, damit eine Wissensverknüpfung stattfinden kann. Zur Lösung ist neben dem vorhandenen Fachwissen auch Allgemeinwissen zu berücksichtigen und zu modellieren. Das Fachwissen ergibt sich aus der Aufgabenstellung. Bei Knobelaufgaben sind es die Aussagen des Aufgabentextes. Das Allgemeinwissen wird nicht formuliert, sondern beim Leser vorausgesetzt. In unserem Beispiel gehört das Wissen über die Altersrelation dazu: „älter“, „der Jüngste“.

Logisches Denken kann das Problem lösen. Im Kapitel 2 werden wir darlegen, wie eine Lösung durch ein Computer-Programm ermittelt werden kann.

Beispiel 1.3 Wissensverknüpfung in einer Knobelaufgabe

Als Kurznotation wollen wir das Gleichheitszeichen = als „programmiert in der Sprache“ interpretieren. Somit besagt die Relation X = Y, dass die Person X in der Sprache Y programmiert. Analog versteht sich das Zeichen ≠.

Aus D folgt:	Felix ≠ Java	(E)
Aus B und D folgt:	Felix ≠ C++	(F)
Aus E und F folgt:	Felix = Python	(G)
Aus C und A folgt:	Emil ≠ C++	(H)
Aus G und H folgt:	Emil = Java	(I)

Aus den Schlussfolgerungen wissen wir nun, dass Felix der Python-Experte (G) ist und Emil in Java (I) programmiert. Damit bleibt für Paul die Programmiersprache C++ übrig.

Nach der Lektüre dieses Buches sollte der Leser in Zukunft Knobelaufgaben als Herausforderung betrachten, diese mittels der dargestellten KI-Techniken zu lösen. Das Wissen muss dabei so formalisiert und dargestellt werden, dass ein geeignetes Programm zur Wissensverarbeitung die Lösung bestimmen kann.

Es fällt vielen Menschen nicht leicht, derartige Aufgaben zu lösen. Umso mehr wird ein entsprechendes Programm einen Eindruck hinterlassen. Dagegen können alle Menschen eine Reihe von Aufgaben sehr schnell und gut lösen, die nur sehr schwer oder noch gar nicht mit einem Computer bearbeitet werden können. Dazu gehören die selbstverständlichen Dinge des täglichen Lebens wie die Gesichtserkennung, das Halten des Gleichgewichtes beim Gehen oder Radfahren, oder auch das Sprechen und Verstehen von gesprochenen oder gelesenen Worten.

Die vorher angedeutete Vorgehensweise der Wissensrepräsentation, wie sie die klassische KI verfolgt, hilft hier meist nicht weiter. Ein Versuch, Wissen zur Wiedererkennung einer bekannten Person zusammenzutragen, wird sehr schnell scheitern:

rotes Haar, kurzes Haar, Bartstoppeln, rundes Gesicht

sind Eigenschaften, die auf Tausende Menschen zutreffen, so dass daraus allein die Erkennung einer bestimmten Person kaum nachvollziehbar sein dürfte. Außerdem setzt man dabei voraus, dass die Eigenschaften wie rundes Gesicht von einem Computer bereits erfolgreich erkannt wurden. Wie erkennt ein Programm dieses aber aus einem Bild? Mittels neuronaler Netze wird versucht, derartige Tätigkeiten, die uns Menschen leichtfallen, im Computer nachzubilden, um diese zur Problemlösung einsetzen zu können. Neuronale Netze erzielen ein gewünschtes Verhalten durch das Zeigen und Verarbeiten von Beispielen. Das Wissen über das Reagieren auf Eingangsinformationen wird aus Beispielen, somit implizit und induktiv, erlernt. Ist ein Muster erst einmal gelernt und gespeichert, kann sich ein neuronales Netz sehr schnell daran „erinnern“. Innerhalb kurzer Zeit kann es eine Ähnlichkeit zwischen einem Bild und dem gespeicherten Muster erkennen.

1.4 Geschichte der KI

Die künstliche Intelligenz gibt es nicht erst seit einigen Jahren, sondern die Idee einer KI kann auf eine lange Geschichte zurückblicken. Bereits im Mittelalter tauchten Ideen auf, eine Maschine zu bauen, die dem Menschen – zumindest zum Teil – ebenbürtig ist. Thomas Hobbes (1588-1679) vertrat die Position, dass *Denken* symbolisches Schließen sei, also nichts Anderes als etwas mit Papier und Stift herauszuarbeiten (*„Reasoning is nothing but reckoning."*). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) konzipierte eine Universal-Maschine, die alles ausrechnen kann, also in der Lage ist, logische Schlüsse zu ziehen. Das *Leibnizsche Programm* sah vor, dass man sein Wissen in einer formalen Beschreibungssprache (*lingua characteristica*) aufschreiben konnte. Mit diesem Wissen konnte dann der *calculus ratiocinator* „rechnen". Mit den Worten der heutigen KI gesprochen heißt das, Leibniz entwickelte eine formale Sprache zur *Wissensrepräsentation* sowie einen Inferenzmechanismus[2] (Wissensverarbeitung) zum *automatischen Schließen*. Leibniz und Hobbes können somit als Vordenker der KI angesehen werden.

Auch aus dem Blickwinkel der Geschichte des Computers ist der Schritt zur KI folgerichtig: Zunächst begann man, Maschinen zu entwickeln, die *rechnen* konnten. Es folgten Maschinen (Programme) an, die in der Lage sind, Texte zu verarbeiten (*Textverarbeitung*). Der nächste Schritt waren Programme, die mit *grafischen Darstellungen* umgehen können. Nun lernen die Computer das *Denken*.

Wir können die Geschichte der KI nicht umfassend darstellen, sondern gehen nur auf einige Ereignisse und Entwicklungsphasen ein. Die Geschichte der KI lässt sich in verschiedene Perioden einteilen:

Erste Schritte 1950-1965 Durch die Entwicklung der ersten programmierbaren Computer in den 40er Jahren waren die technischen Voraussetzungen gegeben, sich mit der Automatisierung von intelligentem Verhalten zu befassen. Turing beispielsweise entwickelte bereits Ende der 40er Jahre ein Schachprogramm.
Nach einigen Vorarbeiten wurde 1956 auf der Darthmouth-Konferenz das Gebiet *Artificial Intelligence* aus der Taufe (Minsky, McCarthy, Newell, Simon u.a.) gehoben.
Gekennzeichnet ist diese Phase durch eine große Euphorie. Im Mittelpunkt stand die Suche nach universellen Lösungsmustern und deren Anwendung auf einfache Probleme. Beispielsweise entstand in dieser Zeit die so genannte *Klötzchenwelt*: Ein Roboter erkennt eine Welt, in der Klötzchen auf bestimmte Weise angeordnet sind und kann darin agieren, das heißt, er stapelt die Klötzchen nach entsprechenden Vorgaben um.
Erste Industrieroboter wurden entwickelt und eingesetzt. Auch im Bereich Sprachverarbeitung erzielte man erste Erfolge: Mit *Eliza*, einem auf reinem Text basierten Beraterprogramm, entwickelte Joseph Weizenbaum einen ersten Chatbot.
Der bereits vorgestellte Turing-Test fällt in die erste Hälfte dieser Phase.

Ernüchterung 1965-1980 Aus der ersten Phase erwuchs die Erkenntnis, dass ein universelles Herangehen viel zu komplex ist, um erfolgreiche Anwendungen zu entwickeln. So setzte einerseits eine gewisse Spezialisierung ein, wie die Entwicklung erster Expertensysteme. So wurde Anfang der 70er Jahre an der Stanford University das medizinische Expertensystem MYCIN entwickelt.

[2] Inferenz = Schlussfolgerung, Schlussfolgern. Lateinisch *inferre*: „hineintragen", „folgern", „schließen"

Dies führte andererseits zu wiederum universell verwendbaren Techniken der Wissensdarstellung, der Wissensverarbeitung sowie der Suche.
Trotz der Ernüchterung, nicht alle Probleme universell lösen zu können, gingen die Erfolgsmeldungen weiter, nun aber spezialisiert auf bestimmte Anwendungsgebiete. Beispielsweise wurde am Stanford AI Lab das erste autonom fahrende Gefährt entwickelt.

Periode 1980-1990 Durch die Erfahrungen der Jahre zuvor war klar, dass man problemspezifisch vorgehen muss. Die Leistungskraft einer Problemlösung hängt eher vom Problemwissen als von den allgemeinen Problemlösungstechniken ab. In diese Phase fallen erste ernstzunehmende Anwendungen der Expertensysteme. Neue Themen kommen auf, beispielsweise Fuzzy-Ansätze und Techniken zur Wissensakquisition. Ebenso orientierte man sich nun an naturanalogen Verfahren wie neuronalen Netzen, genetischen Algorithmen und Simulated Annealing.
Japan legte ein 10-Jahres-Programm zur Beschleunigung der KI-Techniken auf. Auch die Wirtschaft interessiert sich zunehmend für KI. Verbünde zu speziellen KI-Themen entstehen, beispielsweise die Business Rules Group[3].
Auch in Deutschland entstehen schlagkräftige Initiativen. So wurde beispielsweise 1988 das DFKI in Saarbrücken und Kaiserslautern gegründet.
Diese Periode endete wieder mit einer gewissen Ernüchterung, da man die gesteckten Ziele – wie beispielsweise im Japan-Projekt – nur zum Teil erreichen konnte.

Periode 1990-2000 Es erfolgt ein gewisser Paradigmenwechsel zu den *Intelligenten Agenten*. Die anwendungsspezifische Spezialisierung geht weiter. Ebenso erleben die neuronalen Netze aufgrund der stark gewachsenen Leistungsfähigkeit der Computer eine Wiederauferstehung.
Im klassischen Bereich der Spiele gelingen spektakuläre Erfolge: Das Schachprogramm *Deep Blue* schlägt 1996 und 1997 Kasparow.
1997 findet der erste RoboCup statt, ein Wettbewerb, bei dem Computer gegeneinander spielen; entweder als Software oder als echte Roboter.[4]

Periode 2000-2010 Die künstliche Intelligenz hält stärker Einzug in betriebswirtschaftliche Anwendungen. Die neuronalen Netze finden massiven Einsatz im Data Mining. Auch die öffentliche Wahrnehmung steigt. Die Verlage entdecken zunehmend das Thema KI: Die erste Auflage unseres Buches erscheint 2001.
Die Stories of success gehen weiter: 2009 stellt Google sein autonom fahrendes Auto vor.

Seit 2010 Im Bereich Maschinelles Lernen wird eine neue Qualität erreicht, insbesondere durch Deep Learning. Deutliche Fortschritte werden bei der Objekterkennung und generell bei der Umgebungswahrnehmung erzielt. Medienwirksame KI-Erfolge sind zu vermelden: 2011 gewinnt IBM Watson beim Jeopardy. Alpha GO schlägt den Weltmeister.

Gegenwärtig erlebt die KI einen enormen Aufschwung. Die Leistungskraft der Computer hat ein Niveau erreicht, welches rechenintensive Lernalgorithmen – wie beispielsweise im Deep Learning – ermöglicht.

Viele Assistenzsysteme erbringen heute Leistungen, die aus unserer Sicht (menschliche) Intelligenz erfordern. Bei vielen Anwendungen ist die Marktreife erreicht.

[3] http://www.businessrulesgroup.org
[4] https://www.robocup.org/

Die Geschichte der KI besteht aus einem permanenten Auf und Ab. Das Pendel zwischen Ernüchterung und Euphorie schwingt gegenwärtig wieder in Richtung Euphorie. Und dies ist durchaus berechtigt, denn die Stories of success gehen mittlerweile weit über das Niveau von intelligenten Spielalgorithmen hinaus. Vom bereits erwähnten autonom fahrenden Auto über das automatische Rating von Kreditkunden bis hin zu leistungsfähiger Bildverarbeitung gibt es mittlerweile eine Vielzahl von erfolgreichen Anwendungen.

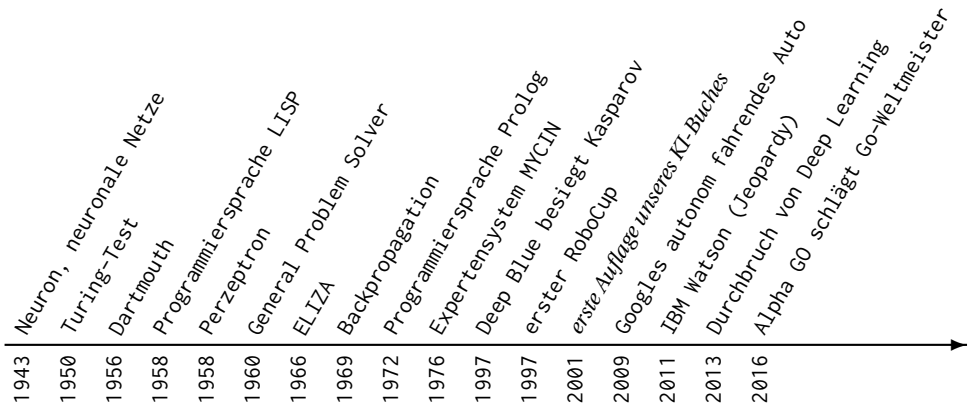


Bild 1.4 Geschichte der Künstlichen Intelligenz

1.5 Wir und die KI

In den Anfangsjahren hatte die KI keine nennenswerte Resonanz in der Allgemeinheit, selbst in den Jahren der ersten Expertensysteme ging die Wirkung kaum über die Fachkreise der Informatik hinaus. Nichtsdestotrotz wurden Expertensysteme weiterentwickelt und fanden Eingang in verschiedene Anwendungen: Es entstanden Diagnosesysteme, die zwar tagtäglich eingesetzt werden, eine künstliche Intelligenz sieht darin aber niemand.

Auch die Entwicklung der schon erwähnten Chatbots, also Programmen für die textuelle Unterhaltung, fand kaum Aufmerksamkeit in der Gesellschaft. So wird seit den 1990er Jahren der Loebner-Preis für die beste Chat-Software vergeben, dies aber außerhalb der Community nicht wahrgenommen.

Die Computer sind immer leistungsfähiger geworden. Methoden und Techniken, die in und für die KI entwickelt wurden, haben dazu beigetragen. Die KI war dennoch lange Zeit kein allgemeines Diskussionsthema.

Weitgehend wurden Techniken der symbolverarbeitenden KI eingesetzt. Aufgrund der expliziten Darstellung des Wissens kann die Arbeitsweise derartiger Systeme gut nachvollzogen werden. Wir sprechen hier von *White-Box-KI*. Die Möglichkeit, das Verhalten eines Systems zu sehen und zu erklären, ist ein wesentlicher Grund dafür, dass diese KI nicht bedrohlich wirkt.

Auch die Niederlage des damaligen Schachweltmeisters Kasparow gegen ein Schachprogramm änderte an der allgemeinen Wahrnehmung nicht viel. Auch das wirkt nicht gefährlich,

Schach wird auch heute noch zwischen Menschen gespielt. Und das, obwohl Schachprogramme auf einem Handy stärker als Schachgroßmeister spielen.

In den Jahren 2012 bis 2015 gelang der Durchbruch bei der Handschrift- und Objekterkennung mittels der Convolutional Neural Networks. Diese höhere Leistungsfähigkeit macht eine Reihe von sehr medienwirksamen Anwendungen möglich, wie insbesondere das autonom fahrende Auto.

Etwa gleichzeitig entstanden die Sprachassistenten Siri (2011), Alexa (2017) und Cortana (2014), die gesprochene Sprache verstehen, besser erkennen, und mehr oder weniger sinnvoll darauf reagieren können. Diese menschlich wirkenden Assistenten erzeugen ein neues Bild der KI, die damit im Alltag gegenwärtig ist. Das autonom fahrende Auto für jedermann im normalen Straßenverkehr wird zwar noch eine geraume Zeit auf sich warten lassen, wird aber schon jetzt medienwirksam diskutiert, so dass auch hier die KI greifbar erscheint. Auf diese Weise ist die KI in den Jahren 2017-2019 zu einem in den Medien viel verwendeten Begriff geworden und in der Allgemeinheit angekommen. Die KI wird als eine der Zukunftstechnologien dargestellt, und so wurde 2019 zum Wissenschaftsjahr der künstlichen Intelligenz.[5]

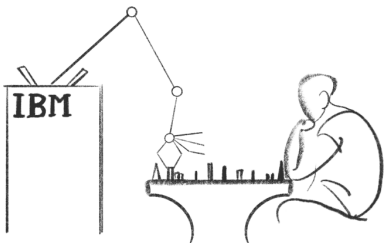
Andererseits wird gerade durch die Medien auch ein düsteres Bild der Zukunft heraufbeschworen: Die KI übernimmt die Macht und für den Menschen bleibt kein Platz. Wie realistisch sind diese Prognosen? Spekulationen über ein intelligentes künstliches Wesen und dessen Auswirkungen gibt es aber nicht erst neuerdings: Der Mathematiker Irving J. Good[6] spielte 1965 mit diesem Gedanken. Wir übernehmen den originalen englischen Text:

Let an ultraintelligent machine be defined as a machine that can far surpass all the intellectual activities of any man however clever. Since the design of machines is one of these intellectual activities, an ultraintelligent machine could design even better machines; there would then unquestionably be an „intelligence explosion", and the intelligence of man would be left far behind. Thus the first ultraintelligent machine is the last invention that man need ever make, provided that the machine is docile enough to tell us how to keep it under control.

Marvin Minsky, einer der KI-Pioniere, die 1956 bei der ersten KI-Sommerschule dabei waren, warnte dann 1970, dass wir aufpassen müssen, dass die Maschinen nicht die Kontrolle über uns Menschen bekommen und fügt hinzu: „Wenn das passiert, dann können wir froh sein, wenn die Roboter uns als Haustiere halten."[7]

Wird es ein solches super- oder ultra-intelligentes künstliches Wesen geben und wenn ja, wann?

Bis jetzt haben wir es mit Hard- und Software-Lösungen zu tun, die zwar immer mehr Aufgaben des Menschen übernehmen, aber dies nur auf einem speziellen Gebiet. Weder kann das Schach spielende Programm GO spielen noch ein Fahrzeug autonom steuern. Wir haben es nach wie vor mit sogenannter schwacher KI zu tun, und dies wird noch einige Jahre andauern.



[5] *https://www.wissenschaftsjahr.de*

[6] Irving J. Good arbeitete im Team von Alan Turing mit, welches den Enigma-Code im Zweiten Weltkrieg entschlüsselte.

[7] „Once the computers got control," says Minsky, „we might never get it back. We would survive at their sufferance. If we're lucky, they might decide to keep us as pets." [Dar70]

Wir sprechen von *schwacher KI*, wenn die Maschine auf einem speziellen Gebiet dem Menschen vergleichbare oder sogar bessere Leistungen zeigt.

Eine KI, die auf vielen oder sogar allen Gebieten, einem Menschen ebenbürtige Leistungen erreicht, wird als *starke KI* bezeichnet. Obige Äußerungen gehen noch einen Schritt weiter und betrachten eine Super-KI. Auch wenn die Medien uns suggerieren, dass eine Beherrschung des Menschen durch die Maschine kurz bevorsteht, so entbehrt das derzeit jeder realistischen Grundlage. Eine sehr optimistische Prognose wird in dem Buch von Toby Walsh [Wal19] gegeben: Im Jahr 2062 werden wir eine starke KI entwickelt haben. Dann ist es aber noch ein weiterer Schritt zu einer Super-KI.

Wesentlicher als die Gedankenspielerei über eine Zeit, in der wir Menschen möglicherweise von Maschinen beherrscht werden, erscheint uns eine Diskussion über den Einsatz der heutigen Informationstechnologie (IT), die ja ständig leistungsfähiger und damit auch vermeintlich klüger wird. Ein alter KI-Spruch lautet: „KI ist etwas, was, wenn es fertig ist, keine KI mehr ist." Viele Ergebnisse der KI-Forschung werden in „normale" Software integriert, und wir nutzen dann diese neue Software, freuen uns über neue Möglichkeiten, werden dies aber selten als KI wahrnehmen.

Die Geschichte der Menschheit lehrt, dass jede Technik nicht nur zum Wohle der Menschen, sondern auch zu ihrem Schaden eingesetzt werden kann. Das gilt auch für die KI, auch heute schon: Wie beeinflussen Algorithmen (unter Nutzung von KI?) die Meinungsbildung in den sozialen Medien? Entscheidungen werden von künstlichen neuronalen Netzen getroffen, deren Verhalten mittels tausender Beispieldaten antrainiert wird. Müssen wir uns diesen maschinellen Entscheidungen unterwerfen, ohne dass wir Begründungen für eine Entscheidung erhalten?

Dieses ist eines der derzeit vordergründigen Forschungsaufgaben in der KI: Wie kann eine *Black-Box-KI*, beispielsweise ein neuronales Netz, Auskunft oder Begründungen für ihr Verhalten geben, damit wir Nutzer den Entscheidungen mehr Vertrauen entgegenbringen können.

Die Europäische Union hat im Jahre 2019 Ethik-Leitlinien für eine vertrauenswürdige KI verabschiedet, vgl. [Eur19]. Der zuerst genannte Grundsatz lautet: *„Die Entwicklung, Einführung und Nutzung von KI-Systemen muss so erfolgen, dass die folgenden ethischen Grundsätze eingehalten werden:*

- *Achtung der menschlichen Autonomie,*
- *Schadensverhütung,*
- *Fairness,*
- *Erklärbarkeit."*

Treten Probleme beziehungsweise Widersprüche zwischen der Erreichbarkeit der Ziele auf, so sind diese zu benennen und aufzulösen.

Wir müssen uns also Regeln vorgeben, nach denen die Entwicklung und der Einsatz von KI vonstattengeht. Es hat vieler Großfeuer insbesondere in den Städten erfordert, bis Brandschutzregeln durchgesetzt wurden, die die Zahl der Brände erheblich verringert haben. Ganz verhindern lassen sich Brände nicht, trotz der Straßenverkehrsordnung gibt es (zu) viele Unfälle. Und so müssen wir wohl auch den Einsatz der KI betrachten: Schäden, die durch, insbesondere autonom agierende, KI verursacht werden, sind erträglich klein zu halten. Vollständig vermeiden werden sich die Schäden auch hier nicht.

Wir wagen ein paar Prognosen:

Wir erwarten, dass die Sprachassistenten sich zu sozialen Agenten weiterentwickeln. Wenn diese ihre Leistungsfähigkeit auch ohne Vernetzung mit zentralen Rechnern bei Google, Apple oder Amazon erreichen, so wird die Verbreitung erheblich zunehmen und diese werden zu unseren ständigen Begleitern werden.

Wir wagen zu prognostizieren, dass das autonome Fahren sich nur sehr, sehr langsam durchsetzen wird und nicht innerhalb der nächsten 10 Jahre (nach Erscheinen dieser Auflage) außerhalb von Teststrecken oder Forschungsprojekten zu erwarten ist.

Werden die Roboter im Jahre 2050 den Fußballweltmeister schlagen? Die Physis von Robotern ist noch sehr weit von der menschlichen Physis entfernt. Vielleicht wird der Fußballweltmeister besiegt, aber dann von Robotern, die keine menschenähnliche Gestalt aufweisen.

Es wird sehr große Fortschritte mit der KI in der Medizin und der Medizintechnik geben: Von treffsicheren Diagnosen, personalisierten Behandlungen bis hin zu KI-gesteuerten operativen Eingriffen werden helfen, uns gesunden zu lassen oder Erkrankungen zu vermeiden.

Wir sehen die Entwicklung der KI mit großem Optimismus und erwarten viele nützliche Anwendungen.

Übung 1.1 KI-Definitionen

Recherchieren Sie Definitionen des Begriffes künstliche Intelligenz und vergleichen Sie diese Definitionen mit der in diesem Buch gegebenen Definition.

Übung 1.2 Mensch und Intelligenz

Bilden Sie Ihre Meinung: Kann es Intelligenz außerhalb des Menschen geben? Begründen Sie Ihren Standpunkt.

Übung 1.3 Chatbots

Testen Sie verschiedene Chatbots. Vergleichen Sie Chatbots, die rein für die Unterhaltung entwickelt wurden, wie beispielsweise Mitsuku, mit denen, die für eine konkrete Anwendung eingesetzt werden, wie zum Beispiel ein Chatbot eines Paketdienstes oder eines Energieversorgers.

Übung 1.4 Schwache KI

Stellen Sie einige Beispiele für schwache KI zusammen.

Übung 1.5 Knobelei

Nehmen Sie sich das Beispiel der Programmierer zum Vorbild, formulieren Sie das Wissen aus den folgenden drei Sätzen und beantworten Sie die Frage: Ist das möglich?

Wenn Emil die Schule schwänzt, dann schwänzt Lena auch. Wenn Paul oder Emil die Schule schwänzen, dann schwänzt Lena nicht. Emil schwänzt die Schule.

2 Darstellung und Verarbeitung von Wissen

Eines der Kerngebiete der symbolverarbeitenden künstlichen Intelligenz ist die Wissensrepräsentation und -verarbeitung. Die Geschichte der KI ist zu großen Teilen durch die Frage geprägt, wie man Wissen auf einem Computer darstellen und verarbeiten kann. Im ersten Abschnitt gehen wir zunächst auf verschiedene Wissensarten ein, die wir Menschen nutzen. Es folgt die Diskussion eines der Grundprinzipien der automatischen Wissensverarbeitung: die Trennung von Wissensrepräsentation und -verarbeitung. Die verbleibenden Abschnitte befassen sich mit Techniken zur Darstellung und Verarbeitung von Wissen auf einem Computer.

2.1 Wissen und Wissensarten

Wissen wird als Information verstanden, die in bestimmten Situationen wertvoll ist und für Entscheidungen genutzt werden kann. Wissen ist Information, die für die Lösung eines Problems wertvoll und hilfreich ist.

Definition 2.1 Wissen

Als *Wissen* betrachten wir Information, die angewendet werden kann.

In welcher Form kann man Wissen repräsentieren?

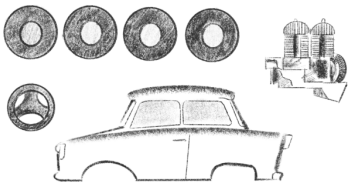
Die von uns Menschen hauptsächlich genutzte Sprache zur Wissensdarstellung ist die natürliche Sprache. Allerdings ist sie wenig geeignet, als Sprache zur Repräsentation von Wissen auf dem Computer zu dienen. Dies liegt im Wesentlichen an der großen Vielfalt, die unsere Sprachen bieten. Ein und derselbe Sachverhalt lässt sich im Deutschen unterschiedlich darstellen. Die Aussagen „Heute ist Montag“, „Montag ist heute“, „Der heutige Tag ist Montag“ und „Heute ist der Tag vor dem Dienstag“ haben alle die gleiche Bedeutung. Dies ist für eine effiziente Verarbeitung sehr ungünstig, da vor der eigentlichen Verknüpfung des Wissens eine Vereinheitlichung der Aussagen, eine so genannte Normalisierung erforderlich ist. Dies ist eines der Probleme, die bei der automatischen Verarbeitung natürlicher Sprache gelöst werden müssen.

Mit welchen Wissensarten gehen wir Menschen tagtäglich um?

Beziehungs-Wissen spielt in unserem Alltag eine große Rolle. Beziehungen zwischen Personen (X ist mit Y verheiratet) oder zwischen Objekten (der Motor ist ein Teil vom Auto) sind typische

Vertreter. Man bezeichnet dies als **relationales Wissen**. Es widerspiegelt einfache Beziehungen zwischen Objekten. Relationales Wissen kann beispielsweise in relationalen Datenbanken dargestellt werden. Ein Nachteil ist, dass im Allgemeinen nur Fakten, aber keine logischen Abhängigkeiten abgebildet werden können.

Im Alltagswissen arbeiten wir häufig mit der **Vererbung von Eigenschaften**. Weiß man, dass ein Auto einen Motor hat und dass der Audi ein Auto ist, so schließen wir sofort, dass der Audi einen Motor hat. Die Eigenschaft „hat Motor“ wird vom Oberbegriff Auto auf den Unterbegriff Audi vererbt.



Obwohl wir nicht explizit gesagt haben, dass der Audi einen Motor hat, wissen wir es, da der Audi eine spezielle Form eines Autos ist und jedes Auto einen Motor hat.

Prozedurales Wissen ist Wissen, das in bestimmten Situationen Aktionen vorschreibt. Viele Eröffnungen beim Schach können prozedural dargestellt werden. Das Tanken eines Autos oder das Betreten eines Restaurants sind ebenfalls feste Abfolgen von Aktionen.

Häufig arbeiten wir auch mit **logischem Wissen**. Wird der FC Hansa Rostock mindestens Tabellenvierter in der 1. Fußballbundesliga, so ist er für einen internationalen Wettbewerb qualifiziert. Dies ist eine logische Implikation. Aus A folgt B: $A \rightarrow B$. Wird Rostock Tabellendritter (A), so kann geschlossen werden, dass B gilt.

In diesem Kapitel werden ausgewählte Wissensrepräsentationsformalismen behandelt, die die obigen Wissensarten in unterschiedlicher Art umsetzen.

Die am besten untersuchte Form der Wissensrepräsentation ist die **Logik**. Es werden zwei Formen betrachtet: die **Aussagenlogik** und die **Prädikatenlogik erster Stufe**.

Semantische Netze und **Frames** sind spezielle Formen einer graphisch beziehungsweise objektorientierten Darstellung für Objekte und deren Eigenschaften. Diese Formen der Wissensrepräsentation beinhalten Vererbungstechniken.

Regel-basierte Sprachen setzen das Konzept der bedingten Ausführung von Aktionen um:

WENN in einem Zustand bestimmte Bedingungen erfüllt sind, DANN führe eine Aktion aus.

Im letzten Abschnitt wird auf **vage Aussagen**, deren Darstellung und Verarbeitung eingegangen. Vage Aussagen sind Aussagen wie: „Es ist hell“, „Morgen wird es mindestens zehn Stunden Sonnenschein geben“.

Für das Studium von weiterführenden Konzepten sei auf die Literatur verwiesen ([BHSA07], [Gin93], [GRS13]). Diese Konzepte befassen sich beispielsweise mit:

- zeitlichem Wissen,
- unvollständigem Wissen,
- Constraints (Wissensdarstellung mittels einschränkender Bedingungen),
- Fall-basiertem Schließen.

2.2 KI und explizite Wissensdarstellung

Um dem Computer Wissen zugänglich zu machen, ist eine Repräsentation in einer Form nötig, die der Computer „versteht“. Mit „Verstehen“ ist nicht gemeint, dass er tatsächlich weiß, was Begriffe wie *reich*, *1 kg* oder *GmbH* bedeuten. Ein Computer muss diese Information nur in geeigneter Weise verarbeiten können. Wir betrachten somit in diesem Kapitel sogenanntes *explizites Wissen*: Wissen, das nicht nur irgendwie vorhanden ist, sondern mittels Sprache oder Bildern (allgemein Zeichen) so ausgedrückt werden kann, dass eine Kommunikation möglich wird.

Der Wunsch nach einer formalisierten und automatisierten Wissensdarstellung und Wissensverarbeitung ist sehr alt. Bereits Aristoteles entwickelte mit seiner **Syllogistik** eine Form der formalisierten Wissensverarbeitung.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), der sowohl auf philosophischen als auch mathematischen Gebieten tätig war, entwickelte ein Konzept, mit dem man im Prinzip alles ausrechnen kann. Das leibnizsche Programm (vgl. Abschnitt 1.4) sah vor, dass sämtliches Wissen, welches man über einen Problembereich hat, formalisiert wird. Hierfür ist eine Sprache erforderlich, in der dieses Wissen formuliert werden kann. Anschließend sollte es möglich sein, mit diesem Wissen zu „rechnen“. Dies erfordert einen Mechanismus, der Informationen in dieser Sprache verarbeiten kann. Leibniz bezeichnete die erforderliche Sprache und den Verarbeitungsmechanismus als:

- lingua characteristica
- calculus ratiocinator.

Mit den Worten der künstlichen Intelligenz aus heutiger Sicht benötigt man

- eine formale Sprache zur **Wissensrepräsentation (WR)**,
- einen Mechanismus zum automatischen Schließen (**Wissensverarbeitung**, **WV**).

Um ein Problem zu lösen, wird typischerweise in diesen Schritten vorgegangen:

Charakterisierung des Gegenstandsbereiches Zunächst wird das Wissen über einen Gegenstandsbereich gesammelt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass nur problemrelevantes Wissen herangezogen wird. Soll ein Kunde bezüglich seiner Kreditwürdigkeit betrachtet werden, ist seine Haarfarbe völlig uninteressant.
Relevant ist ebenfalls der *Detaillierungsgrad* einer Information. Sind im Zusammenhang mit der Kreditwürdigkeit die vorhandenen Sicherheiten eines Kunden zu beurteilen, spielen Besitzgüter unterhalb einer bestimmten Grenze keine Rolle.

Symbolische Repräsentation der Objekte Der zweite Schritt ist die *formale Darstellung* des gesammelten Wissens in einer geeigneten Sprache. Geeignete Darstellungsformen können beispielsweise mathematische Relationen, eine Logik, aber auch eine passende Programmiersprache sein.

Eingabe des Wissens in den Computer Das Wissen über den Problem- oder Gegenstandsbereich wird nun dem Computer übergeben.

Fragen stellen Darauf aufbauend erfolgt die Lösung des Problems, indem beispielsweise Fragen über die Kreditwürdigkeit eines Kunden X gestellt werden. Dabei wird versucht, eine zu prüfende Annahme aufgrund des vorhandenen Wissens nachzuweisen.

Interpretieren der Antworten Die vom Computer generierte Antwort wird interpretiert, sie wird in die reale Welt zurückübersetzt.

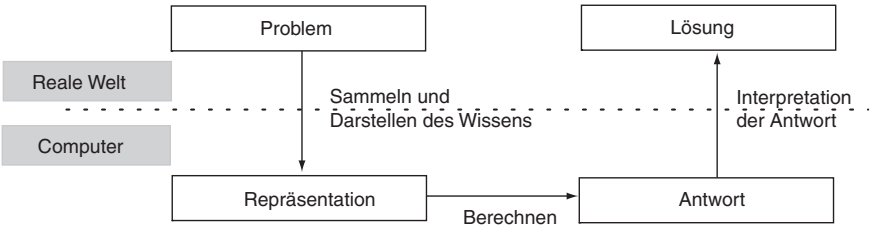


Bild 2.1 Vorgehen bei einer Problemlösung

Dieses Vorgehen ist zunächst nicht KI-spezifisch. Während in der klassischen Programmentwicklung das Wissen über ein Problem direkt in den Lösungsalgorithmus hineinprogrammiert wird, stellt die KI dagegen das Wissen getrennt von der Verarbeitungskomponente dar. Ein ähnliches Konzept findet man bei den Datenbanken, wo Information (Datensätze) und Verarbeitung getrennt verwaltet werden.

Eine typische Architektur eines wissensbasierten Systems ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Diese ist charakteristisch für die White-Box-KI: Durch diese Architektur ist die Verarbeitung transparent und durch das System sogar erklärbar.

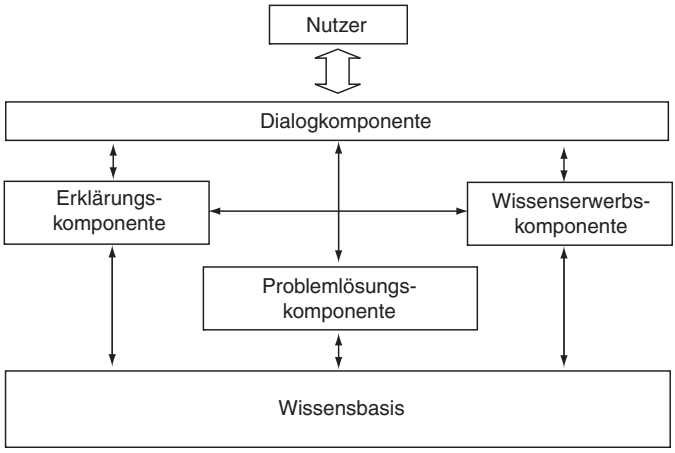


Bild 2.2 Struktur eines Expertensystems

Die symbolverarbeitende KI folgt dem Prinzip der **Trennung von Wissen und Verarbeitung**. Wählt man beispielsweise die Logik als Wissensrepräsentations-Sprache, so besteht die Wissensbasis aus logischen Aussagen. Die Problemlösungskomponente enthält dann einen Logik-Beweiser.

- Welche Vorteile bietet eine solche Architektur?
- Warum ist die Trennung von Problemlösungskomponente und Wissensbasis sinnvoll?

Es kann der Fall eintreten, dass das Wissen im Laufe der Zeit revidiert wird, beispielsweise dadurch, dass ein Zusammenhang, eine bestimmte logische Regel als nicht korrekt erkannt

wird. Betrachten wir ein System zur Kreditwürdigkeitsprüfung, so kann es passieren, dass eine Person als kreditwürdig bewertet wurde, was sich – leider erst später – als falsch herausstellt. Wird beispielsweise die Kreditwürdigkeit nur davon abhängig gemacht, dass ein regelmäßiges Einkommen in einer bestimmten Mindesthöhe vorliegt:

regelmäßiges_Einkommen → kreditwürdig

so stellt man schnell fest, dass zumindest eventuelle Schulden geprüft werden müssen:

regelmäßiges_Einkommen und geringe_Schulden → kreditwürdig

In einem konventionellen Programm suchen wir nun die entsprechende Stelle im Programm und modifizieren diese. Anschließend muss das System vollständig oder teilweise neu erstellt werden. Ist das Wissen aber *explizit* und von der Verarbeitung getrennt repräsentiert, dann müssen wir nur Regeln ergänzen oder vorhandene Regeln anpassen. Die Verarbeitungskomponente ist davon nicht betroffen. Die *Modifikation* kann sogar zur Laufzeit automatisch geschehen.

Da eine Änderung der Wissensbasis die Verarbeitungskomponente nicht betrifft, lässt sich sogar die gesamte Wissensbasis auswechseln. Das gleiche Programm kann also für unterschiedliche Anwendungen verwendet werden. Entfernt man die Wissensbasis eines Expertensystems, so spricht man in diesem Zusammenhang auch von einer **Expert system shell** (ESS). Die Verwendung einer ESS für unterschiedliche Anwendungen setzt natürlich voraus, dass die gewählte Sprache zur Wissensrepräsentation für diese Anwendungen gleich ist.

Ein weiterer Vorteil der expliziten Darstellung des Wissens ist die damit verbundene Erhöhung der *Transparenz*. Es ist wesentlich leichter möglich, das benutzte Wissen zu verstehen. Es ist ebenfalls einfacher, den Ablauf einer Verarbeitung zu verfolgen.

Grundsätzlich gilt, dass eine Problemlösung immer von dem vorhandenen, *expliziten* Wissen ausgeht. Aufgrund dieses Wissens wird versucht, eine Hypothese zu überprüfen.

Beispiel 2.1 Kreditwürdigkeit

Seien diese Aussagen bekannt:

- *regelmäßiges_Einkommen und geringe_Schulden → kreditwürdig*
- *regelmäßiges_Einkommen*
- *geringe_Schulden*

Neben der bereits diskutierten Regel ist auch bekannt, dass ein regelmäßiges Einkommen gegeben ist und nur geringe Schulden vorliegen. Man sieht sofort, dass die Kreditwürdigkeit gemäß der Regel erfüllt ist. Implizit steckt also die Kreditwürdigkeit in den gegebenen Aussagen.

Aufgabe einer Wissensverarbeitung ist es nun, dieses implizite Wissen abzuleiten. Problemlösen ist das *Explizieren von implizitem Wissen*. Die hierfür gewählte **Wissensrepräsentationssprache** und der zugehörige **Verarbeitungsmechanismus** müssen gewissen Kriterien genügen:

- Die WR-Sprache muss die Darstellung des Wissens ermöglichen. Will man darstellen, dass es morgen eventuell regnet, reicht eine WR-Sprache, die klassische Logik unterstützt, nicht aus. Stattdessen ist eine Sprache erforderlich, die unsichere Aussagen darstellen kann.
- Der Verarbeitungsmechanismus muss das Wissen verarbeiten können. Wählt man als WR-Sprache die Aussagenlogik, so ist ein aussagenlogischer Beweiser erforderlich.
- Die Verarbeitung soll effizient möglich sein. Ein aussagenlogischer Beweiser muss eine Antwort nicht irgendwann, sondern innerhalb akzeptabler Zeiten liefern.
- Die Qualität der Antwort muss den Erfordernissen des Problems entsprechen. Vielfach genügt eine Näherungslösung, eine Lösung, die „gut genug“ ist.

2.3 Darstellung von Wissen mit Hilfe von Logik

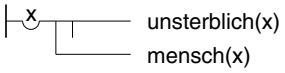
Logik ist nach [Bro19]

… die Lehre vom schlüssigen und folgerichtigen Denken, v. a. vom richtigen Schließen, welches dadurch gekennzeichnet ist, dass es zu wahren Voraussetzungen wahre Schlüsse liefert.

Die Logik spielt im menschlichen Alltag eine große Rolle. Wissen in Form von logischen Zusammenhängen nimmt einen zentralen Platz ein.

Zunächst wird die Aussagenlogik eingeführt und gezeigt, wie Aussagen automatisch, also durch einen Computer verarbeitet werden können. Danach wird die Prädikatenlogik erster Stufe betrachtet.

Der in Wismar geborene Mathematiker und Philosoph Gottlob Frege (1848-1925) gilt als der Begründer der modernen Logik. Mit seiner Begriffsschrift[1] legte er 1879 die Grundlage für den Prädikatenkalkül erster Stufe. Frege baute die Logik auf den drei Operationen *Implikation*, *Negation* und *Allquantifizierung* auf und stellte Aussagen grafisch dar:



Die Aussage wird interpretiert als:

Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x nicht unsterblich.

Die grafische Notation hat sich nicht durchgesetzt, da sie beispielsweise für eine maschinelle Verarbeitung von Wissen nicht geeignet ist. Dennoch hat Frege mit dieser Formalisierung einen, wenn nicht sogar den entscheidenden Schritt getan, um die Logik einer automatischen Verarbeitung zugänglich zu machen.

[1] Gottlob Frege (1879): Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Verlag von Louis Nebert, Halle 1879. Die Schrift ist im WWW frei verfügbar.

2.3.1 Aussagenlogik

Aussagen der folgenden Form werden von uns im Alltag häufig benutzt:

- *Es regnet.*
- *Die Firma hat Gewinn erwirtschaftet.*
- *Der deutsche Fußballmeister 2028 heißt Hansa Rostock.*

Solche Aussagen können nur wahr oder falsch sein, sie sind nicht halbwahr oder wahrscheinlich. Dagegen ist bei der Aussage:

Er ist groß.

nicht klar, ob sie wahr oder falsch ist. Dies hängt zumeist von der beurteilenden Person ab.

Die klassische Logik betrachtet nur zweiwertige Aussagen:

- Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.
- Es gibt keine Aussage, die sowohl falsch als auch wahr ist.

Man bezeichnet diese Annahmen als den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* oder vom *ausgeschlossenen Widerspruch.*

Es werden also nur Aussagen betrachtet, die wahr oder falsch sind. Der Wahrheitswert kann aber durchaus (noch) unbekannt sein. Die GOLDBACHsche Vermutung:

Jede gerade natürliche Zahl lässt sich darstellen als Summe zweier Primzahlen.

ist bis heute nicht bewiesen oder widerlegt. Diese Aussage ist aber in jedem Fall entweder wahr oder falsch.

In der Aussagenlogik werden elementare Aussagen durch **aussagenlogische Variablen** dargestellt. Man kann Aussagen aber auch verknüpfen. Sei A diese Aussage:

„Die BMW-Aktie ist um 10% gestiegen.“

Sei B die Aussage

„Der Dollar ist um 1% gefallen.“,

so steht die Formel $A \wedge B$ für die Verknüpfung der beiden Aussagen A und B:

„Die BMW-Aktie ist um 10% gestiegen und *der Dollar ist um 1% gefallen.“*

Die Aussagen A und B sind **elementare** oder **atomare Aussagen**. Man bezeichnet A und B als **aussagenlogische Variablen**. Die Aussage $A \wedge B$ ist eine **zusammengesetzte Aussage**. Neben dem logischen Und gibt es weitere Möglichkeiten der Kombination von Aussagen. Sie sind in Tabelle 2.1 dargestellt.

Tabelle 2.1 Aussagenlogische Verknüpfungen

Symbol	Bezeichnung	Beispiel	Aussage ist wahr, falls ...
$\wedge$	Und	$X \wedge Y$	X und Y wahr sind
$\vee$	Oder	$X \vee Y$	X oder Y wahr sind
$\neg$	Negation	$\neg X$	X falsch ist
$\rightarrow$	Implikation	$X \rightarrow Y$	Y wahr ist, falls X wahr ist
$\leftrightarrow$	Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y$	X genau dann wahr ist, wenn Y wahr ist

Die Definition der Verknüpfungen kann mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle erfolgen (Tabelle 2.2). Als Symbol für wahr wird `W` und als Symbol für falsch `F` verwendet. Das logische Oder stellt das *einschließende* Oder dar. $A \vee B$ ist auch wahr, falls beide Teilaussagen A und B wahr sind. Das ausschließende Oder (exclusive or, `XOR`) entspricht dem Entweder-Oder. Das `XOR` ist insbesondere falsch, wenn beide Teilaussagen A und B wahr sind.

Tabelle 2.2 Wahrheitswerttabelle aussagenlogischer Verknüpfungen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	A XOR B
W	W	F	W	W	W	W	F
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	F	W
F	F	W	F	F	W	W	F

Die Aussage $A \rightarrow B$ steht für:

Wenn A wahr ist, dann ist B zwingend auch wahr.

Wichtig ist hier, dass über den Fall, dass A falsch ist, keine Aussage gemacht wird. In diesem Fall betrachtet man die Aussage folglich als wahr.

Dies kann anhand der Regel

Wenn Hansa Rostock Meister ist, dann spielt Hansa Rostock in der Champions League.

illustriert werden. Diese Aussage ist auch wahr, falls Hansa (leider) nicht Meister ist.

Die Aussage $A \leftrightarrow B$ steht für

A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist.

Diese Aussage ist wahr, wenn A, B beide wahr oder beide falsch sind.

Aussagen können beliebig verknüpft werden. Die Verknüpfungsoperatoren können nicht nur auf elementare Aussagen angewendet werden, sondern auch auf bereits zusammengesetzte Aussagen. Damit kann man den Begriff einer aussagenlogischen Formel definieren.

Definition 2.2 Aussagenlogische Formeln

Alle Aussagenvariablen sind Formeln.

Sind A und B aussagenlogische Formeln, dann auch:

- $A \wedge B$
- $A \vee B$
- $\neg A$
- $A \rightarrow B$
- $A \leftrightarrow B$

Das Übersetzen von Aussagen aus dem täglichen Leben in die formale Logik bereitet häufig Probleme. Die Tabelle 2.3 auf der nächsten Seite stellt typische Satzmuster und deren formale Darstellung gegenüber.

Tabelle 2.3 Alltagssprache und logische Formeln

Satz	Aussagenlogische Form
... und ...	$A \wedge B$
Sowohl ... als auch ...	$A \wedge B$
Aber, jedoch, obwohl	$A \wedge B$
... oder ...	$A \vee B$
Wenn A dann B; aus A folgt B	$A \rightarrow B$
A, vorausgesetzt dass B gilt	$B \rightarrow A$
A, falls/wenn B	$B \rightarrow A$
A nur dann, wenn B	$A \rightarrow B$
A genau dann, wenn B	$A \leftrightarrow B$
Entweder A oder B	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
Weder A noch B	$\neg A \wedge \neg B$
A, es sei denn B	$(B \rightarrow \neg A) \wedge (\neg B \rightarrow A)$
Es stimmt nicht, dass ...	$\neg(...)$

Wird die Aussagenlogik als Wissensrepräsentationssprache verwendet, interessiert die Frage, ob eine Aussage **wahr** oder **falsch** ist.

Es gibt zum einen Aussagen, die *immer wahr* oder *immer falsch* sind; zum anderen gibt es auch Aussagen, deren Wahrheitswert von dem der *Teilaussagen* abhängt.

Die Aussage:

Die SAP-Aktie steigt oder die SAP-Aktie steigt nicht.

ist eine immer wahre Aussage, da genau eine der Teilaussagen wahr ist.

Die Aussage:

Die SAP-Aktie steigt und die SAP-Aktie steigt nicht.

ist *immer falsch*, denn keine Aktie kann gleichzeitig steigen UND nicht steigen.

Es gilt generell, dass

$$A \wedge \neg A$$

immer falsch ist. Unabhängig davon, welche Aussage A darstellt, eine der beiden Teilaussagen ist immer falsch. Und damit ist auch die Und-Verknüpfung falsch. Analog ist die Aussage

$$A \vee \neg A$$

immer wahr. Dagegen kann über den Wahrheitswert der Aussage

Die IBM-Aktie steigt
oder
mehr als 50% der Abiturienten in Deutschland studieren.

keine Aussage getroffen werden, so lange die Wahrheitswerte der beiden Teilaussagen nicht bekannt sind.

Wovon hängt der Wahrheitswert der Formel $A \vee B$ ab? Offensichtlich müssen die Wahrheitswerte der aussagenlogischen Variablen A und B bekannt sein. Ist eine von beiden wahr, ist die gesamte Aussage wahr.

Dies gilt allgemein: Kennt man den Wahrheitswert der atomaren Aussagen, der aussagenlogischen Variablen, so ist der Wahrheitswert einer Aussage definiert. Um ihn zu bestimmen, wird zuerst untersucht, was die aussagenlogischen Variablen in einer realen Welt bedeuten (siehe Tabelle 2.4).

Tabelle 2.4 Interpretation

	Interpretation der Aussage A	Interpretation der Aussage B	$A \wedge B$
Welt 1	$5 > 4$	$1 = 2$	F
Welt 2	$2 = 2$	$7 > 4$	W

Man bezeichnet die Zuordnung von Ereignissen aus einer realen Welt zu den aussagenlogischen Variablen als **Interpretation**.

Definition 2.3 Interpretation

Sei M die Menge aller aussagenlogischen Formeln. Eine Funktion

$$I : M \rightarrow \{\mathtt{W}, \mathtt{F}\}$$

heißt **Interpretation**.

Eine Interpretation ordnet jeder aussagenlogischen Variablen einen Wahrheitswert zu. Mit Hilfe der Wahrheitswerttabellen kann man den Wahrheitswert einer zusammengesetzten aussagenlogischen Formel bestimmen. Die Funktion I widerspiegelt den Bezug zur realen Welt. Der Wahrheitswert einer Aussage hängt im Allgemeinen von der Interpretation I ab.

Definition 2.4 Allgemeingültig, falsch, erfüllbar, falsifizierbar

Eine aussagenlogische Formel heißt

- *erfüllbar*, falls eine Interpretation existiert, so dass die Formel wahr wird,
- *falsifizierbar*, falls eine Interpretation existiert, so dass die Formel falsch wird,
- *allgemeingültig* oder **wahr**, falls die Formel unter jeder Interpretation wahr wird; eine allgemeingültige Formel wird auch **Tautologie** genannt,
- *unerfüllbar* oder **falsch**, falls die Formel unter jeder Interpretation falsch ist. Es existiert keine Interpretation, so dass die Formel wahr wird.

Für aussagenlogische Formeln gelten diese Sätze:

Satz 2.1 Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit

Eine Formel X ist allgemeingültig genau dann, wenn $\neg X$ unerfüllbar ist. ■

Satz 2.2 Mengenbeziehungen aussagenlogischer Formeln

1. Die erfüllbaren und die falschen Formeln sind komplementär: Die erfüllbaren und die falschen Formeln ergeben die Menge aller Formeln; es gibt keine Formel, die sowohl erfüllbar als auch falsch ist.
2. Die allgemeingültigen Formeln sind eine Teilmenge der erfüllbaren, die falschen eine Teilmenge der falsifizierbaren Formeln.
3. Der Durchschnitt der erfüllbaren mit den falsifizierbaren Formeln vereinigt mit den allgemeingültigen Formeln ergibt die erfüllbaren Formeln.
4. Der Durchschnitt der erfüllbaren mit den falsifizierbaren Formeln vereinigt mit den falschen Formeln ergibt die falsifizierbaren Formeln. ■

Die Menge aller Formeln kann – wie im Bild 2.3 dargestellt – aufgeteilt werden in die Mengen:

- T – Tautologien
- F – falsche Formeln
- $T \cup M$ – erfüllbare Formeln
- $M \cup F$ – falsifizierbare Formeln

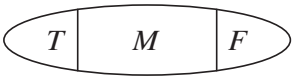


Bild 2.3 Tautologien, falsche, erfüllbare, falsifizierbare Formeln

Die Menge M ist offensichtlich die Menge der Aussagen, die sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar sind. Die Wahrheit einer Aussage hängt für diese Aussagen von der Bezugswelt, der Interpretation ab.

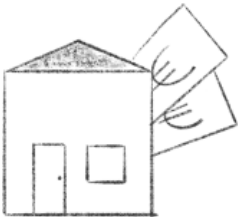
Definition 2.5 Modell

Sei I eine Interpretation und X eine aussagenlogische Formel. Ist X unter I wahr, so bezeichnet man I als **Modell** von X.

Die künstliche Intelligenz hat das Ziel, Logik zur **Wissensrepräsentation** zu nutzen. Um **Wissensverarbeitung** mit Aussagenlogik zu realisieren, muss es uns gelingen, mit logischen Formeln *automatisch* umzugehen. Vorhandene Aussagen müssen durch ein Computerprogramm zu neuen Aussagen verknüpft werden können. Hypothesen sollen bewiesen oder widerlegt werden können. Gegenstand der Untersuchungen ist folglich, wie man aussagenlogische Formeln verarbeiten und logische Schlüsse ziehen kann.

Dabei interessiert im Allgemeinen nicht, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, sondern ob aus einer gegebenen Menge von Aussagen eine Behauptung zwingend folgt oder nicht. Soll beispielsweise untersucht werden, ob ein Kunde (bezüglich einer Hausfinanzierung) kreditwürdig ist, hat man logische Aussagen der Form:

(1) *Festes_Einkommen* $\wedge$ *Eigenkapital_mindestens_50%* $\rightarrow$ *Kunde_kreditwürdig*



Verfügt man nun noch über die Information, dass der Kunde ein festes Einkommen und mehr als 50% der Bausumme als Eigenkapital hat:

(2) *Festes_Einkommen*

(3) *Eigenkapital_mindestens_50%*

so kann man daraus schließen, dass der Kunde kreditwürdig ist.

Es soll also nicht bewiesen werden, dass die Aussage

Kunde_kreditwürdig

wahr oder falsch ist, sondern dass sie wahr ist unter der Voraussetzung, dass die Aussagen (1), (2) und (3) wahr sind. Dabei werden die gegebenen Aussagen, die alle als wahr vorausgesetzt werden, als mit UND verknüpft betrachtet.

Wie beweist man, dass aus den Aussagen:

A

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow C$

folgt, dass dann auch

C

gilt?

Zu prüfen ist, ob die Aussage C wahr ist, vorausgesetzt, obige Aussagen sind wahr. Folgt C aus den gegebenen Aussagen?

Eine mögliche Form eines Beweises ist die Berechnung mittels **Wahrheitswerttabellen**.

Obige Aufgabe kann umformuliert werden. Die Überprüfung, ob aus obigen Aussagen die Aussage C folgt, ist äquivalent zum Beweis, dass die Aussage:

$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$

eine Tautologie ist. Zu beweisen ist somit, dass diese Formel immer wahr ist. Dies kann mit einer Wahrheitswerttabelle geschehen:

Tabelle 2.5 Beweis mittels Wahrheitswerttabelle

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$
W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	W
W	F	W	F	W	W
W	F	F	F	W	W
F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W

Die Formel ist eine Tautologie. Aus den gegebenen Aussagen folgt also immer, dass dann auch C gilt. Alternativ kann man die Wahrheitswerttabelle auch nur nach den Zeilen durchsuchen, wo die gegebenen drei Aussagen wahr sind. In allen diesen Zeilen muss die Aussage C auch wahr sein. Die relevante Zeile ist in Tabelle 2.6 auf der nächsten Seite aufgeführt.

Tabelle 2.6 Wahrheitswerttabelle – relevante Zeile

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$
W	W	W	W	W	W

Der Zusammenhang von Formeln kann durch den Begriff der **semantischen Folgerung** dargestellt werden.

Definition 2.6 Semantische Folgerung

Sei X eine Menge von aussagenlogischen Formeln, Y eine aussagenlogische Formel.

Y ist eine **semantische Folgerung** von X

falls jedes Modell von X auch Modell von Y ist. Man schreibt dafür $X \models Y$ und sagt auch Y folgt aus X.

Ein Beispiel illustriert das Vorgehen: Eine elektronische Schaltung ist durch aussagenlogische Formeln beschreibbar (Wissensrepräsentation). Das Überprüfen von Eigenschaften der Schaltung kann nun durch einen aussagenlogischen Beweis erfolgen (Wissensverarbeitung).

Beispiel 2.2 Elektronische Schaltung

Sei die folgende Schaltung gegeben:

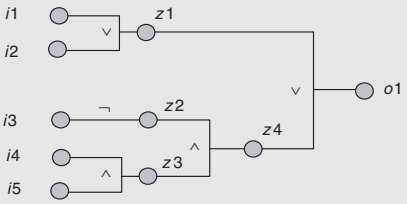


Bild 2.4 Elektronische Schaltung

An den fünf Eingabepunkten können Signale (0 für falsch oder 1 für wahr) angelegt werden. Diese werden durch die Verknüpfungen Und, Oder und Negation in ein Ausgabesignal umgewandelt.

Die Schaltung kann durch aussagenlogische Formeln beschrieben werden.

$$
\begin{aligned}
i1 \vee i2 &\leftrightarrow z1 \quad (1)\\
i3 &\leftrightarrow \neg z2 \quad (2)\\
i4 \wedge i5 &\leftrightarrow z3 \quad (3)\\
z2 \wedge z3 &\leftrightarrow z4 \quad (4)\\
z1 \vee z4 &\leftrightarrow o1 \quad (5)
\end{aligned}
$$

Es wird behauptet, dass das Ausgabesignal immer 1 ist, wenn das Eingabesignal $i1 = 1$ ist:

$$i1 \rightarrow o1$$

Dies kann man mit einer Wahrheitswerttabelle beweisen. Die Formel

$$(i1 \vee i2 \leftrightarrow z1) \wedge (i3 \leftrightarrow \neg z2) \wedge (i4 \wedge i5 \leftrightarrow z3) \wedge (z2 \wedge z3 \leftrightarrow z4) \wedge (z1 \vee z4 \leftrightarrow o1) \rightarrow (i1 \rightarrow o1)$$

muss eine Tautologie sein.

Tabelle 2.7 Elektronische Schaltung – Wahrheitswerttabelle

$i1$	...	$i5$	$z1$	$z2$	$z3$	$z4$	$o1$	$i1 \rightarrow o1$
W		W	W	W	W	W	W	W
W		W	W	W	W	W	F	W
W		W	W	W	W	F	W	W
W		W	W	W	W	F	F	W
	...							
F		F	F	F	F	W	W	W
F		F	F	F	F	W	F	W
F		F	F	F	F	F	W	W
F		F	F	F	F	F	F	W

Dies bedeutet, dass 2^n Zeilen zu untersuchen sind, wenn n die Anzahl der aussagenlogischen Variablen ist. In diesem Beispiel sind dies 1024 Kombinationsmöglichkeiten.

Bei genauerer Betrachtung stellt man natürlich fest, dass in diesem Beispiel nur 32 Möglichkeiten zu untersuchen sind, da sich die Werte der Zwischenknoten aus den Eingabesignalen berechnen lassen und folglich ein direkter Zusammenhang zwischen den Eingabesignalen und dem Ausgabesignal hergestellt werden kann.

Was passiert aber, wenn nicht nur fünf, sondern 10, 20 oder mehr Eingabesignale vorliegen? Reale Beispiele arbeiten mit einer Vielzahl von aussagenlogischen Variablen, so dass Wahrheitswerttabellen im Allgemeinen nicht mehr praktikabel sind. Sie haben den Nachteil, dass dies einen exponentiellen Aufwand erfordert.

Deshalb hat man nach Alternativen für dieses Verfahren gesucht.

Gegeben seien die Aussagen:

- *Gesellschafter_hat_25000* $\rightarrow$ *Gründung_GmbH_möglich*
- *Gesellschafter_hat_25000*

Wir können daraus sofort schließen, dass die Gründung einer GmbH möglich ist. Was liegt diesem logischen Schluss zugrunde? Man hat eine Implikation der Form:

$A \rightarrow B$

Weiterhin ist gegeben, dass die Voraussetzung der Implikation gilt:

A

Man sieht sofort, dass das Schließen auf B unabhängig davon, was sich hinter A und B verbirgt, erfolgen kann. Dies stellt eine universelle Schlussregel dar, die unabhängig vom jeweiligen Problem angewandt werden kann.

Modus ponens

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

Nun ist die Idee naheliegend, mit Hilfe dieser Schlussregel gegebene Formeln zu neuen zu verknüpfen, bis die zu beweisende Behauptung entsteht. Im Beispiel

$$A$$
$$A \rightarrow B$$
$$B \rightarrow C$$

kann der Modus ponens zunächst auf die ersten beiden Formeln angewandt werden, dabei entsteht die Aussage B. Anschließend kann diese mit der dritten Formel wiederum per Modus ponens verknüpft werden, wobei die zu beweisende Aussage C entsteht.

Man bezeichnet solche Schlussregeln wie den Modus ponens auch als Inferenzregeln.

Eine weitere Schlussregel ist der:

Modus tollens

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Nach wie vor ist unser Ziel, auf der Basis der Aussagenlogik Wissensverarbeitung durchzuführen. Hat man Wissen X über einen Problembereich gegeben, so möchte man wissen, ob aus X zwingend folgt, dass dann auch eine Aussage Y wahr ist, somit eine bestimmte Eigenschaft erfüllt ist.

Dies wurde als semantische Folgerung $X \models Y$ in Definition 2.6 auf Seite 35 eingeführt.

Nun werden aber in Form der Inferenzregeln Muster definiert, mit deren Hilfe aussagenlogische Formeln zu neuen verknüpft werden können. Natürlich sollen die Inferenzregeln zum Beweis der ursprünglichen Frage

Stimmt es, dass aus X immer Y folgt, also $X \models Y$?

benutzt werden. Man kann jedoch nicht beliebige Inferenzregeln definieren, denn dies kann dazu führen kann, dass man auch Formeln berechnen kann, die nicht gelten. Die Schlussregel

$$\frac{A \rightarrow B \quad B}{A}$$

ist offensichtlich falsch und damit wenig hilfreich, da man mit ihr auch Dinge berechnen kann, die nicht folgen. Aus den Formeln $A \rightarrow B$ und B folgt nicht, dass A gilt.

Demzufolge ist es erforderlich, dass das *Folgern* von Formeln auf der Ebene der *Gültigkeit* von der *Berechnung* von Formeln auf der *Inferenzebene* unterschieden wird. Dies wird mit dem Begriff des **Ableitens** getan.

Definition 2.7 Ableitbarkeit

Y ist aus X ableitbar,

$$X \vdash Y$$

wenn eine endliche Folge von Inferenzschritten existiert, so dass man von X zu Y gelangt.

Der Begriff Ableitbarkeit $\vdash$ hängt offensichtlich von den zugrunde liegenden Schlussregeln ab. Damit sind zwei unterschiedliche Begriffe für Zusammenhänge von Formeln gegeben:

- semantische Folgerung: $X \models Y$
- Ableitbarkeit: $X \vdash Y$

Der Bezug zwischen beiden Begriffen wird durch die Begriffe der **Korrektheit** und der **Vollständigkeit** hergestellt. Diese Eigenschaften sind für die **Wissensverarbeitung** von großer Bedeutung. Zum einen stellt sich die Frage, ob mit Hilfe der Schlussregeln nur Formeln berechnet werden können, die auch folgen. Dies ist die Frage, ob eine Formel, die man ausgerechnet hat, auch wirklich zwingend aus den Formeln folgt. Wird ein Kunde als kreditwürdig charakterisiert, so muss dies auch aus dem vorhandenen Wissen folgen. Man bezeichnet diese Eigenschaft als *Korrektheit*.

Der Begriff der *Vollständigkeit* dreht die Fragestellung gewissermaßen um. Kann jede Formel, die aus einer gegebenen Formelmenge folgt, auch wirklich berechnet werden? Ist ein Kunde gemäß dem vorhandenen Wissen kreditwürdig, so soll unser Programm auch in der Lage sein, dies zu berechnen. Damit wird die Leistungskraft der Schlussregeln charakterisiert.

Definition 2.8 Korrektheit und Vollständigkeit

Ein Beweis-Verfahren heißt **korrekt**, wenn für beliebige Formeln X, Y gilt:

Falls $X \vdash Y$ gilt, dann gilt auch $X \models Y$.

Ein Beweis-Verfahren heißt **vollständig**, wenn für beliebige Formeln X, Y gilt:

Falls $X \models Y$ gilt, dann gilt auch $X \vdash Y$.

Baut man ein Beweisverfahren allein auf dem Modus ponens auf, so stellt man schnell fest, dass dieser allein nicht ausreicht. Aus den Formeln

$A \rightarrow B$
$\neg B$

kann man nicht ableiten, dass $\neg A$ gilt. Nimmt man weitere Inferenzregeln wie den Modus tollens hinzu, so ergeben sich aufgrund der kombinatorischen Vielfalt – da man in ein und derselben Situation verschiedene Inferenzregeln anwenden kann – Komplexitätsprobleme.

Resolution

Resolution ist ein Beweisverfahren, welches sich für das automatische Beweisen besonders eignet, da es allein auf einer einzigen Inferenzregel aufbaut. Resolution wurde 1965 von J. A. Robinson eingeführt.

Resolution hat zwei wesentliche Charakteristika:

1. Es wird eine einheitliche Darstellung, eine **Normalform** von aussagenlogischen Formeln verwendet.
2. Resolution führt einen **Widerspruchsbeweis**.

Die Beschränkung auf Widerspruchsbeweise lässt vermuten, dass dies eine drastische Einschränkung ist. Man kann jedoch „positive“ Beweise stets auf Widerspruchsbeweise zurückführen, wie im Folgenden erläutert wird.

Welche Form der *einheitlichen* Darstellung von aussagenlogischen Formeln wird von der Resolution vorausgesetzt? Es gibt eine Reihe von gleichwertigen Aussagen, beispielsweise die Aussagen:

$A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$

Es gibt eine Vielzahl von weiteren unterschiedlichen Formulierungen für denselben logischen Zusammenhang. Dies ist ungünstig, da ein automatischer Beweiser mit unterschiedlichen Formeln, die alle dasselbe bedeuten, umgehen können muss. Man ist somit aus der Sicht des automatischen Beweisens an einer möglichst einheitlichen Darstellung von Formeln interessiert.

Definition 2.9 Semantische Äquivalenz

Zwei aussagenlogische Formeln X und Y heißen äquivalent,

$X \equiv Y$,

falls für jede beliebige Interpretation gilt:

Die Interpretation ist Modell für X genau dann, wenn sie auch Modell für Y ist.

In Tabelle 2.8 sind Äquivalenzen von aussagenlogischen Formeln aufgeführt. Klammern werden, falls dies nicht missverständlich ist, weggelassen.

Tabelle 2.8 Aussagenlogische Äquivalenzen

Bezeichnung	Äquivalenz
Implikation	$X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$
Logische Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y \equiv X \rightarrow Y \wedge Y \rightarrow X$
De Morgan	$\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$
De Morgan	$\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$
Distributivität	$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
Distributivität	$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
Idempotenz	$X \vee X \equiv X$
Idempotenz	$X \wedge X \equiv X$
Kommutativität	$X \vee Y \equiv Y \vee X$
Kommutativität	$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$
Assoziativität	$X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$
Assoziativität	$X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$
Absorption	$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$
Absorption	$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$
Doppelte Negation	$\neg\neg X \equiv X$
	$X \wedge W \equiv X$
	$X \wedge F \equiv F$
	$X \vee W \equiv W$
	$X \vee F \equiv X$

Aus Tabelle 2.8 ist ersichtlich, dass man die logische Äquivalenz und die logische Implikation nicht unbedingt benötigt, da sich beide mit Hilfe der Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ darstellen lassen. Dies reduziert die Vielfalt der aussagenlogischen Formeln, was für die automatische Verarbeitung von Vorteil ist.

Die Idee ist nun, bestimmte Formeln aus der Menge der zueinander äquivalenten Formeln auszuwählen. So muss in einem Beweis nur noch mit diesen umgegangen werden. Man versucht, äquivalente Formeln in eine Standardform, eine Normalform umzuwandeln. Die hier dargestellte Normalform enthält als kleinste Bestandteile Literale (vgl. Kapitel 4).

Definition 2.10 Literal

Ein Literal ist eine aussagenlogische Variable oder deren Negation.

Eine aussagenlogische Variable bezeichnet man als **positives Literal**, die Negation einer aussagenlogischen Variablen als **negatives Literal**. Nun wird eine mögliche Normalform definiert:

Definition 2.11 Konjunktive Normalform

Hat eine Formel die Struktur:

$(A \vee ... \vee B) \wedge \ldots \wedge (X \vee ... \vee Y)$

und sind A, B, ... Literale, so ist die Formel in **konjunktiver Normalform**.

Eine Formel in konjunktiver Normalform besteht aus Teilformeln K_i, die durch das logische Und verknüpft sind:

$K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_n$

Die Teilformeln K_i bestehen aus Literalen, die durch das logische Oder verknüpft sind:

$K_i = (A \vee ... \vee B)$

Die Teilformeln K_i nennt man **Klauseln**. Die *konjunktive Normalform* (KNF) wird auch als **Klausel-Normalform** bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass eine KNF nicht eindeutig sein kann, da sowohl die Oder- als auch die Und-Verknüpfung kommutativ sind. In jedem Fall existiert aber zu jeder aussagenlogischen Formel mindestens eine Formel in konjunktiver Normalform. Jede Formel hat mindestens eine äquivalente KNF. Der in Listing 2.1 dargestellte Algorithmus beschreibt die Transformation in eine äquivalente KNF:

Listing 2.1 Transformation auf Klauselnormalform (Aussagenlogik)

```
PROCEDURE KLAUSELNORMALFORM
  Ersetze alle Äquivalenzen A ↔ B durch (A → B) ∧ (B → A);
  Ersetze alle Implikationen A → B durch  ¬A ∨ B;
  Verschiebe die Negation bis zu den aussagenlogischen Variablen;
  Entferne doppelte Negationen;
  Transformiere auf KNF durch Ausmultiplizieren;
END
```

Bei der Transformation auf Klausel-Normalform werden die in Tabelle 2.8 auf Seite 39 aufgeführten Äquivalenzen von Formeln benutzt. Zunächst wird die logische Äquivalenz $\leftrightarrow$, danach die Implikation $\rightarrow$ ersetzt. Dann werden die Negationen „nach innen“ (bis zu den atomaren Formeln, also den Variablen) geschoben, wobei gleichzeitig die doppelten Negationen eliminiert werden. Anschließend wird durch „Ausmultiplizieren“, das heißt die Anwendung der Distributivgesetze, die KNF hergestellt.

Die für den Algorithmus relevanten Äquivalenzen werden im oberen Teil der Tabelle 2.8 auf Seite 39 aufgeführt. Man kann bei der Transformation auf KNF gleichzeitig die im unteren Teil der Tabelle aufgeführten Äquivalenzen berücksichtigen. Das sofortige Anwenden beispielsweise der Idempotenz $A \vee A \equiv A$ sorgt für eine Vereinfachung der Formeln. Ziel ist die automatische Verarbeitung von Wissen. Jede unnötig große Formel erschwert die Arbeit des Beweisers.

Da sowohl $\wedge$ als auch $\vee$ assoziativ sind, können an den entsprechenden Stellen Klammern weggelassen werden. Beispielsweise kann

$(A \vee B) \vee C$ als $A \vee B \vee C$

dargestellt werden.

Beispiel 2.3 Transformation auf Klauselnormalform

Die Formel $\neg(A \vee B) \leftrightarrow C$ wird in die konjunktive Normalform überführt.

Formel	ausgeführte Transformation
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow C$	
$(\neg(A \vee B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg(A \vee B))$	Ersetzen der Äquivalenz $\leftrightarrow$
$(\neg\neg(A \vee B) \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg(A \vee B))$	Ersetzen der Implikation $\rightarrow$
$((\neg\neg A \vee \neg\neg B) \vee C) \wedge (\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B))$	Negation zu den Variablen
$((A \vee B) \vee C) \wedge (\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B))$	Doppelte Negation löschen
$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg B)$	Ausmultiplizieren gemäß Distributivgesetze

Damit sind wir dem Ziel der Wissensverarbeitung auf der Basis der Aussagenlogik einen großen Schritt näher gekommen. Es wurde eine einheitliche Darstellung, eine Normalform für aussagenlogische Formeln definiert und die Transformation auf KNF erläutert. Es fehlt nur noch das Verfahren, welches das „Rechnen“ mit Formeln in Klausel-Normalform erlaubt. Wie eingangs angeführt, beruht Resolution auf dem Prinzip des Widerspruchsbeweises. Der folgende Satz gibt die Rechtfertigung dafür, dass man die Überprüfung, ob eine Formel wahr ist, auf die Untersuchung, ob ihre Negation falsch (widersprüchlich) ist, zurückführen kann.

Satz 2.3 Äquivalenz von semantischer Folgerung und Widerspruchsbeweis

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $X \models Y$
- $X \wedge \neg Y$ ist widersprüchlich

■

Es genügt also, sich auf Methoden, die **Widersprüche** aufdecken, zu beschränken. Resolution ist ein solches Verfahren.

Folgt aus einer gegebenen Menge von Formeln X eine Behauptung Y? Hier stellt X das Wissen dar, welches über einen Gegenstands- oder Problembereich bekannt ist. Es muss bewiesen werden, dass aus diesem Wissen X folgt, dass die Hypothese Y wahr ist, beispielsweise dass ein Kunde kreditwürdig ist. Gemäß Satz 2.3 wird die Negation der Behauptung $\neg Y$ zum gegebenen Wissen X hinzugenommen und anschließend versucht, daraus einen Widerspruch herzuleiten. Gelingt dies, ist die ursprüngliche Aussage bewiesen.

Im Folgenden wird die **konjunktive Normalform** (KNF) vorausgesetzt:

$(A \vee ... \vee B) \wedge \ldots \wedge (X \vee ... \vee Y)$

Zur Vereinfachung kann alternativ auf eine Mengenschreibweise für die KNF zurückgegriffen werden. Dazu werden die Klauseln ohne die Und-Verknüpfung notiert, da es ja keine andere Art der Verknüpfung von Klauseln gibt. Analog wird in den Klauseln auf das Oder-Zeichen verzichtet.

$\{\{A,\ldots,B\},\ldots,\{X,\ldots,Y\}\}$

Man kann die **Klauseln** nun alternativ auch separat – jede Klausel allein – aufzählen:

$\{A,\ldots,B\}$

$\ldots$

$\{X,\ldots,Y\}$

Da alle gegebenen Formeln als wahr, das heißt als mit Und verknüpft vorausgesetzt werden, ist dies korrekt.

Die Mengenschreibweise hat den Vorteil, dass man Vereinfachungen, die sich aus Assoziativität, Kommutativität und Idempotenz ergeben, sofort berücksichtigt.

Beispiel 2.2 kann nun fortgesetzt werden. Die Schaltung wird beschrieben durch die Formeln:

$i1$	$\vee$	$i2$	$\leftrightarrow$	$z1$	(1)
$i3$			$\leftrightarrow$	$\neg z2$	(2)
$i4$	$\wedge$	$i5$	$\leftrightarrow$	$z3$	(3)
$z2$	$\wedge$	$z3$	$\leftrightarrow$	$z4$	(4)
$z1$	$\vee$	$z4$	$\leftrightarrow$	$o1$	(5)

Die Klausel-Normalformen für die Formeln sind in Tabelle 2.9 aufgeführt.

Tabelle 2.9 Klausel-Normalform für Schaltungsbeispiel

Formel	Klausel	
$i1 \vee i2 \leftrightarrow z1$	$\neg i1 \vee z1$	(1)
	$\neg i2 \vee z1$	(2)
	$\neg z1 \vee i1 \vee i2$	(3)
$\neg i3 \leftrightarrow \neg z2$	$\neg i3 \vee \neg z2$	(4)
	$i3 \vee z2$	(5)
$i4 \wedge i5 \leftrightarrow z3$	$\neg i4 \vee \neg i5 \vee z3$	(6)
	$\neg z3 \vee i4$	(7)
	$\neg z3 \vee i5$	(8)

Formel	Klausel	
$z2 \wedge z3 \leftrightarrow z4$	$\neg z2 \vee \neg z3 \vee z4$	(9)
	$\neg z4 \vee z2$	(10)
	$\neg z4 \vee z3$	(11)
$z1 \vee z4 \leftrightarrow o1$	$\neg z1 \vee o1$	(12)
	$\neg z4 \vee o1$	(13)
	$\neg o1 \vee z1 \vee z4$	(14)

Doch nun zur Resolutions-Inferenzregel.

Definition 2.12 Resolutionsregel Aussagenlogik

Seien C_1, C_2 Klauseln und L ein positives Literal. Es gelte:

- $L \in C_1$,
- $\neg L \in C_2$.

Dann heißt die Klausel $(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg L\})$ **Resolvente** von C_1 und C_2.

In der Definition der Resolutionsregel bezeichnet \ die Mengendifferenz.

Die Resolutionsregel nimmt also 2 Klauseln, die komplementäre Literale enthalten. Die beiden Klauseln werden einfach zu einer Klausel vereinigt, wobei die beiden komplementären Literale herausgelöscht werden.

Die Resolutionsregel ist anwendbar auf Klauseln, die komplementäre Literale enthalten. Hat man zwei Klauseln der Form:

$C_1 = \{L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n\}$
$C_2 = \{\neg L_1, K_2, K_3, \ldots, K_m\}$

so werden die beiden komplementären Literale L_1 und $\neg L_1$ gelöscht und die restlichen Literale zusammengefügt:

$$\text{Resolvente} = \{L_2, L_3, \ldots, L_n, K_2, K_3, \ldots, K_m\}$$

Zu klären ist noch, woran man den Widerspruch erkennt. Wendet man die Resolutionsregel auf die widersprüchlichen Klauseln

$\{\neg A\}$ und $\{A\}$

an, so ergibt sich die leere Klausel $\{\}$, die offensichtlich den **Widerspruch** repräsentiert.

Welche Eigenschaften hat die Resolutionsregel? Ist sie korrekt, folgt jede Formel, die man mit Resolution berechnen kann, auch aus den Formeln? Ist Resolution vollständig, kann man jede Formel, die folgt, auch berechnen (vgl. Definition 2.8 auf Seite 38)?

Satz 2.4 Korrektheit Resolutionsregel

Die Resolutionsregel ist korrekt. Ist X eine Klauselmenge und Y eine Resolvente von zwei Klauseln aus X, so sind X und $X \cup \{Y\}$ äquivalent. ■

Resolution ist jedoch nicht vollständig. Man kann beispielsweise aus den beiden Klauseln

$\{A\}$
$\{B\}$

nicht ableiten, dass $A \vee B$ gilt:

$\{A, B\}$

Das war aber auch nicht das Ziel. Ziel war es, Widersprüche aufzudecken. Und diesbezüglich ist die Resolution vollständig:

Satz 2.5 Widerlegungsvollständigkeit Resolution

Ist die Klauselmenge widersprüchlich, so existiert eine endliche Folge von Resolutionsschritten, die zum Widerspruch führt. ■

Wie beweist man, dass aus A und B die Aussage $A \vee B$ folgt? Die Behauptung $A \vee B$ wird negiert und zu den gegebenen Aussagen A und B hinzugefügt. Anschließend wird der Widerspruch abgeleitet:

$A \vee B$ ergibt negiert: $\neg A \ \wedge \ \neg B$

Somit ergeben sich die Klauseln:

1. $\{A\}$
2. $\{B\}$
3. $\{\neg A\}$
4. $\{\neg B\}$

Damit erhält man unmittelbar den Widerspruch.

Man beachte, dass immer nur jeweils ein Paar von komplementären Literalen gelöscht wird. Seien diese Klauseln gegeben:

1. $\{A, B\}$
2. $\{\neg A, \neg B\}$

Wäre das gleichzeitige Löschen von komplementären Literalen möglich, käme man direkt auf die leere Klausel, den Widerspruch. Die beiden Klauseln widersprechen sich aber nicht. Ist A wahr und B falsch, so sind beide Klauseln gleichzeitig wahr, es liegt also kein Widerspruch vor.

Doch zurück zur elektronischen Schaltung. Wir können nun die Aussage $i1 \rightarrow o1$ mittels Resolution beweisen.

Beispiel 2.4 Elektronische Schaltung – Resolution

Klausel		**Klausel**	
$\neg i1 \vee z1$	(1)	$\neg z3 \vee i5$	(8)
$\neg i2 \vee z1$	(2)	$\neg z2 \vee \neg z3 \vee z4$	(9)
$\neg z1 \vee i1 \vee i2$	(3)	$\neg z4 \vee z2$	(10)
$\neg i3 \vee \neg z2$	(4)	$\neg z4 \vee z3$	(11)
$i3 \vee z2$	(5)	$\neg z1 \vee o1$	(12)
$\neg i4 \vee \neg i5 \vee z3$	(6)	$\neg z4 \vee o1$	(13)
$\neg z3 \vee i4$	(7)	$\neg o1 \vee z1 \vee z4$	(14)

Die zu beweisende Aussage $i1 \rightarrow o1$ wird negiert $\neg(i1 \rightarrow o1)$, in Klauselnormalform umgewandelt und hinzugefügt:

Klausel

$i1$ (15)

$\neg o1$ (16)

Der Widerspruch wird mittels Resolution gesucht:

Verknüpfte Klauseln	neue Klausel	
1 + 15	$z1$	(17)
12 + 16	$\neg z1$	(18)
17 + 18	$\{\}$ Widerspruch	(19)

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ein weiteres Beispiel zeigt die Vorgehensweise für einen realitätsnahen Anwendungsfall. Wie bereits im Abschnitt 1.3 angesprochen, eignen sich Knobelaufgaben hierfür sehr gut. Die Übersetzung der umgangsprachlichen Sätze in aussagenlogische Formeln ist dabei eine Voraussetzung für die weitere Verarbeitung.

Beispiel 2.5 Knobelei

Inspektor Craig hat einen Fall zu lösen. Er hat drei Personen im Verdacht, die Tat begangen zu haben. Als Täter kommen nur A, B und C in Frage. Inspektor Craig hat diese Informationen:

1. Wenn A schuldig und B unschuldig ist, so ist C schuldig.
2. C arbeitet niemals allein.
3. A arbeitet niemals mit C.
4. Nur A, B und C kommen als Täter in Frage.

Mit Hilfe der Aussagenlogik kann der Fall gelöst werden. Zunächst müssen die drei Informationen aussagenlogisch formuliert werden. Die aussagenlogische Variable A wird als „A war der Täter“ interpretiert. Analog werden B und C interpretiert.

Damit ergibt sich diese aussagenlogische Repräsentation des Wissens:

1. $A \wedge \neg B \rightarrow C$
2. $C \rightarrow A \vee B$
3. $\neg(A \wedge C)$
4. $A \vee B \vee C$

Die vier Aussagen werden in Klauselnormalform gebracht:

$\neg A \vee B \vee C$ (1)

$\neg C \vee A \vee B$ (2)

$\neg A \vee \neg C$ (3)

$A \vee B \vee C$ (4)

Inspektor Craig behauptet, dass B ein/der Täter war. Dies negieren wir:

$\neg B$ (5)

Mittels Resolution wird der Widerspruch hergeleitet:

$5+1$		$\neg A \vee C$	(6)
$5+4$		$A \vee C$	(7)
$2+3$		$\neg C \vee B$	(8)
$8+5$		$\neg C$	(9)
$6+7$		C	(10)
$9+10$	$\{\}$	Widerspruch	(11)

Damit ist beweisen, dass B ein Täter war.

Über eine eventuelle Mittäterschaft von A oder C wird hierbei keine Aussage getroffen. Gegenstand der Untersuchung war nur, ob B ein/der Täter ist. Nur dies wurde bewiesen.

An den Beispielen 2.4 und 2.5 wird ersichtlich, dass das Führen eines Beweises auch einem Computerprogramm übertragen werden kann. Der Algorithmus zur Transformation auf KNF ist in Listing 2.1 auf Seite 40 dargestellt. Das Suchen eines Widerspruchs reduziert sich auf das permanente Suchen von zwei Klauseln, die komplementäre Literale enthalten. Beide Aufgaben sind auf einen Rechner übertragbar.

Unter der das Buch ergänzenden WWW-Seite *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* stellen wir einen aussagenlogischen Resolutionsbeweiser sowie eine Reihe von Beispielen bereit.

2.3.2 Prädikatenlogik

Will man das in Kapitel 1 angegebene einführende Beispiel 1.2 mit Hilfe der Aussagenlogik und Resolution lösen, so stellt man fest, dass dies leider nicht sehr elegant geht.

Beispiel 2.6 Drei Programmierer

In einer Firma arbeiten drei Freunde: ein C++-, ein Java- und ein Python-Programmierer. Sie heißen Emil, Paul und Felix.

Der C++-Programmierer hat keine Geschwister. Er ist der Jüngste. Felix, der mit der Schwester von Emil verheiratet ist, ist älter als der Java-Programmierer.

Wie stellt man dar, dass der C++-Programmierer keine Geschwister hat? Dies geht beispielsweise in Form einer logischen Implikation:

- *cplus_programmierer_emil* → *keine_geschwister_emil*

Da nicht bekannt ist, ob Emil der C++-Programmierer ist, müssen wir eine derartige Regel für alle drei Personen formulieren:

- *cplus_programmierer_paul* → *keine_geschwister_paul*
- *cplus_programmierer_felix* → *keine_geschwister_felix*

Analog verfahren wir für die Beziehung, dass der C++-Programmierer der Jüngste ist. Dies ist relativ aufwändig und führt zu einer Vielzahl von logischen Formeln. Es widerspricht aber auch der kompakten Darstellung:

- *Der C++-Programmierer hat keine Geschwister.*

Formuliert man diese Aussage etwas um, so erhält man:

- *Wenn eine Person x der C++-Programmierer ist, so hat x keine Geschwister.*

Oder:

- *Wenn für x die Eigenschaft C++-Programmierer wahr ist, so ist für x zwingend auch die Eigenschaft keine_Geschwister erfüllt.*

Dies legt eine logische Beschreibung nahe:

- *cplus_programmierer*(x) → *keine_geschwister*(x)

Den Eigenschaften werden Objekte zugeordnet, für die diese Eigenschaften erfüllt sind. Verwendet man an Stelle fester Objekte Variablen, so ergibt sich die Frage, wie diese Variablen zu verstehen sind. Dazu stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- Für alle … gilt …
- Es existiert (mindestens) ein …, so dass gilt …

Man bezeichnet dies als **Quantifizierung der Variablen**. Für die All-Quantifizierung wird das Zeichen ∀, für die Existenz-Quantifizierung das Symbol ∃ verwendet.

Damit sind nun die Aussagen aus Beispiel 2.6 auf der vorherigen Seite besser formulierbar:

- $\forall x$ *cplus_programmierer*(x) → *keine_geschwister*(x)
- $\forall x$ *cplus_programmierer*(x) → *jüngster*(x)

Die Aussage

- Felix, der mit der Schwester von Emil verheiratet ist, ist älter als der Java-Programmierer.

wird sofort in die für das Beispiel relevanten Informationen übersetzt:

- ¬*keine_geschwister*(*emil*)
- ¬*jüngster*(*felix*)
- ¬*java_programmierer*(*felix*)

Die Eigenschaften jüngster, java_programmierer, die erfüllt sein können oder nicht, werden Prädikate genannt. Die im Beispiel eingeführte Logik heißt **Prädikatenlogik**. Sie stellt eine Erweiterung der Aussagenlogik dar:

- Den Elementaraussagen können Objekte zugeordnet werden, für die die entsprechende Eigenschaft gilt oder nicht.

- An Stelle der Objekte können Variablen verwendet werden, die existenz- oder all-quantifiziert sind.

In Tabelle 2.10 wird eine Übersicht über die in der Aussagenlogik und in der Prädikatenlogik verfügbaren Ausdrucksmittel gegeben.

Die in der Tabelle verwendeten Variablen X und Y sind beliebige aussagenlogische oder prädikatenlogische Formeln, z ist eine Variable.

Tabelle 2.10 Aussagen- und prädikatenlogische Verknüpfungen

Bezeichnung	Aussagenlogik	Prädikatenlogik
Elementare Aussagen	jüngster_felix	jüngster(felix)
$\wedge$ Und	$X \wedge Y$	$X \wedge Y$
$\vee$ Oder	$X \vee Y$	$X \vee Y$
$\neg$ Negation	$\neg X$	$\neg X$
$\rightarrow$ Implikation	$X \rightarrow Y$	$X \rightarrow Y$
$X \leftrightarrow Y$ Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
$\exists$ Existenzquantifizierung	–	$\exists z$ jüngster(z)
$\forall$ Allquantifizierung	–	$\forall z$ jüngster(z)

In Definition 2.14 werden prädikatenlogische Formeln definiert. Dazu wird zunächst der Begriff eines Terms eingeführt. Terme kann man als beliebig zusammengesetzte Objekte interpretieren. Im Kontext der Arithmetik sind Terme: 5, minus(7, 2), mal(minus(5, 1), 4).

Definition 2.13 Terme

1. Jede Konstante ist ein Term.
2. Jede Variable ist ein Term.
3. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Definition 2.14 Prädikatenlogische Formeln

1. Ist p ein n-stelliges Prädikatsymbol und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $p(t_1, \ldots, t_n)$ eine (atomare) Formel.
2. Sind A und B Formeln, dann sind auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \rightarrow B$ und $A \leftrightarrow B$ Formeln.
3. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind $\forall x\, F$ und $\exists x\, F$ Formeln.

Ein Quantifizieren ist nur über Variable, die für Objekte stehen, möglich. Nicht zulässig ist eine Quantifizierung der Form:

$$\forall X\ X(\mathit{felix})$$

Prädikatenlogische Aussagen dürfen nur Variablen enthalten, wenn diese quantifiziert werden. Folglich werden nur Formeln betrachtet, die ausschließlich *quantifizierte Variablen* enthalten. Solche Formeln heißen **geschlossene Formeln**.

Die Prädikatenlogik erlaubt auch die Verwendung von Funktionen (vgl. Definition 2.13 auf der vorherigen Seite). Auf diese wird in diesem Abschnitt nicht näher eingegangen.

Ein korrektes Übersetzen von Aussagen in prädikatenlogische Formeln erfordert einen korrekten Umgang mit den Quantoren. Hier sind einige Muster angegeben:

Satz	Prädikatenlogische Form
Alle ...	$\forall x \ \ldots$
Nicht alle ...	$\neg \forall x \ \ldots$
Wenn jemand ..., dann ...	$\forall x \ \ldots \rightarrow \ldots$
Keiner ...	$\neg \exists x \ldots$ oder $\forall x \neg \ldots$
Manche, einige ...	$\exists x \ \ldots$

Häufig quantifizieren wir in unserer Alltagssprache *implizit*. Die Aussage „Menschen sind intelligent“ bezieht sich auf alle Menschen, sie ist also eine allquantifizierte Aussage.

Wie drückt man in der Prädikatenlogik aus: *Alle Discobesucher sind jung?*

1. Variante $\forall x\ \mathit{discobesucher}(x) \wedge \mathit{jung}(x)$

2. Variante $\forall x\ \mathit{discobesucher}(x) \rightarrow \mathit{jung}(x)$

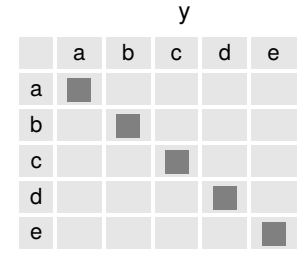
Hier steht $\forall$ wirklich für alle x. Sie können also einen beliebigen Menschen dafür einsetzen. Besuchen alle Menschen die Disco und sind jung? Nein. Also ist Variante 2 richtig: *Falls* das gewählte x ein Discobesucher ist, dann ist er oder sie zwingend jung.

Wie übersetzt man folgende Aussagen in die Prädikatenlogik? Anhand einiger Aussagen wird dies veranschaulicht. Unter den Aussagen sind einige offensichtlich falsche Aussagen, die dennoch korrekt in die Prädikatenlogik übersetzt werden:

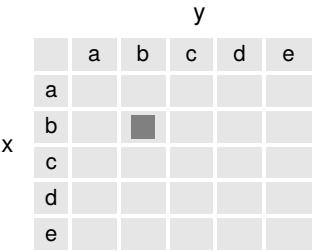
Aussage	prädikatenlogische Formel
Alle Elefanten sind Säugetiere.	$\forall x\ \mathit{elefant}(x) \rightarrow \mathit{saeugetier}(x)$
Einige Elefanten sind Säugetiere.	$\exists x\ \mathit{elefant}(x) \wedge \mathit{saeugetier}(x)$
Einige Elefanten sind keine Säugetiere.	$\exists x\ \mathit{elefant}(x) \wedge \neg\mathit{saeugetier}(x)$
Kein Elefant ist ein Säugetier.	$\forall x\ \mathit{elefant}(x) \rightarrow \neg\mathit{saeugetier}(x)$ oder $\neg\exists x\ \mathit{elefant}(x) \wedge \mathit{saeugetier}(x)$
Alle Vögel haben Federn.	$\forall x\ \mathit{vogel}(x) \rightarrow \mathit{hatferdern}(x)$
Einige Vögel können fliegen.	$\exists x\ \mathit{vogel}(x) \wedge \mathit{kannfliegen}(x)$
Einige Vögel können nicht fliegen.	$\exists x\ \mathit{vogel}(x) \wedge \neg\mathit{kannfliegen}(x)$
Kein Vogel ist ein Säugetier.	$\neg\exists x\ \mathit{vogel}(x) \wedge \mathit{saeugetier}(x)$

Man kann die Quantoren durch eine Matrixdarstellung veranschaulichen. Dazu werden in einer Matrix jene Kombinationen aus Zeile und Spalte markiert, für welche die jeweilige Aussage

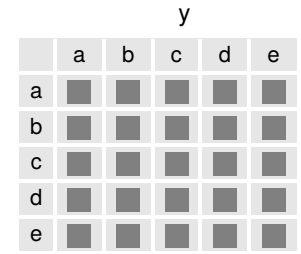
gilt. Als Beispiel nehmen wir die Relation *fragt*(x, y), also: x fragt y. Unsere Welt bestehe nur aus den Objekten, hier natürlich Menschen, a, b, c, d, e.



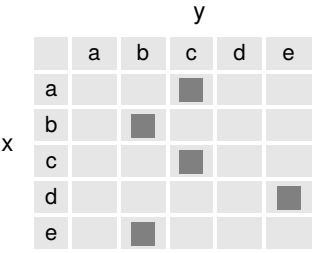
Jeder fragt sich selbst.
$\forall x\ fragt(x, x)$
Zumindest die Diagonale ist voll besetzt. Es können durchaus weitere Kombinationen wahr sein.



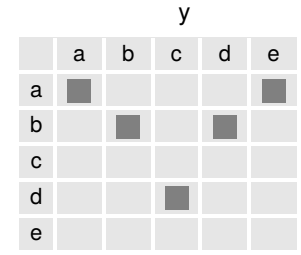
Jemand fragt sich selbst.
$\exists x\ fragt(x, x)$
Zumindest ein Diagonalenelement ist wahr. Auch hier kann es weitere wahre Kombinationen geben.



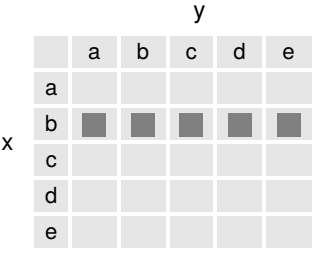
Jeder fragt jeden.
$\forall x\ \forall y\ fragt(x, y)$
Jede Kombination ist wahr.



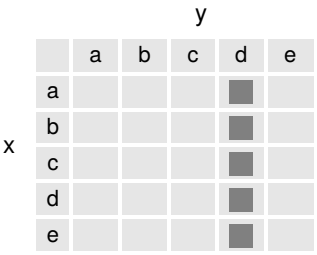
Jeder fragt jemanden.
$\forall x\ \exists y\ fragt(x, y)$
Keine Zeile ist leer. Es kann weitere Kombinationen geben, denn die Aussage ist nur, dass jeder mindestens einen fragt.



Jeder wird von jemandem gefragt.
$\forall y\ \exists x\ fragt(x, y)$
Keine Spalte ist leer. Auch hier sind weitere Kombinationen möglich.

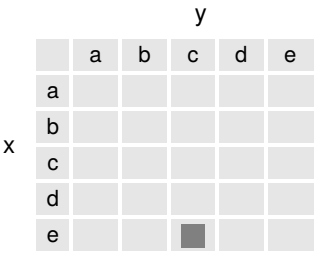


Jemand fragt jeden.
$\exists x\ \forall y\ fragt(x, y)$
Zumindestens eine Zeile ist voll besetzt.



Jemand wird von allen gefragt.
$\exists y\ \forall x\ \mathit{fragt}(x, y)$
Mindestens eine Spalte ist komplett besetzt.

Jemand fragt jemanden.
$\exists x\ \exists y\ \mathit{fragt}(x, y)$
Mindestens eine Kombination ist wahr.



Die Beispiele zeigen, dass die Reihenfolge der Quantoren über die Bedeutung der Aussage entscheiden kann. In einer mehrfach allquantifizierten Aussage spielt die Reihenfolge dagegen keine Rolle. So sind die beiden Darstellungen für die Aussage „Jeder fragt jeden“ äquivalent:

$$\forall x\ \forall y\ \mathit{fragt}(x, y) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \forall y\ \forall x\ \mathit{fragt}(x, y).$$

Allerdings gilt das nicht, wenn man Existenz- und Allaussagen, wie oben dargestellt, mischt.

Das Übersetzen eines Satzes aus der Alltagssprache in die Prädikatenlogik kann durchaus knifflig sein:

„Sowohl GmbHs als auch Aktiengesellschaften sind Kapitalgesellschaften.“

Für die Konstruktion „sowohl … als auch …“ wird in Tabelle 2.3 auf Seite 31 das Und vorgeschlagen:

$$\forall x\ \mathit{GmbH}(x) \wedge \mathit{AG}(x) \rightarrow \mathit{Kapitalgesellschaft}(x)$$

Aber das ist nicht korrekt. Denn in dem Satz stecken zwei Aussagen:

- GmbHs sind Kapitalgesellschaften.
- Aktiengesellschaften sind Kapitalgesellschaften.

Die ursprüngliche Aussage hätte also ausführlich so aussehen müssen: „Es gelten sowohl die Aussage

- GmbHs sind Kapitalgesellschaften, als auch die Aussage
- Aktiengesellschaften sind Kapitalgesellschaften.“

Dies ergibt:

$$\forall x\ \mathit{GmbH}(x) \rightarrow \mathit{Kapitalgesellschaft}(x) \quad \wedge \quad \forall x\ \mathit{AG}(x) \rightarrow \mathit{Kapitalgesellschaft}(x)$$

Diese Formel lässt sich auch wie folgt formulieren:

$$\forall x\ \mathit{GmbH}(x) \vee \mathit{AG}(x) \rightarrow \mathit{Kapitalgesellschaft}(x)$$

Die Äquivalenz beider Darstellungen kann durch Umwandlung auf Klauselnormalform nachgewiesen werden.

Die Interpretation dieser Formel zeigt, dass der ursprüngliche Gedanke korrekt ausgedrückt wird: Wenn x eine GmbH oder Aktiengesellschaft ist, dann ist x eine Kapitalgesellschaft.

Analog hätten wir verfahren müssen, wenn die Aussage mit einem Und formuliert wäre:

„GmbHs und Aktiengesellschaften sind Kapitalgesellschaften."

Neben dem Und-Oder-Problem in der Alltagssprache tritt auch ein Oder-Problem auf. Wir sagen Oder, meinen aber häufig Entweder-Oder:

„Ich gehe heute Abend ins Kino oder ins Theater."

Analog zur Aussagenlogik hängt auch hier der Wahrheitswert einer prädikatenlogischen Formel vom Wahrheitswert der Teilformeln ab. In der Aussagenlogik muss man nur untersuchen, wie der Wahrheitswert einer Formel von den Wahrheitswerten der Aussagenvariablen abhängt. Da nun Objekte (die Argumente der Prädikate) sowie Quantifizierungen hinzukommen, erweitern wir das in der Aussagenlogik verwendete Vorgehen.

Die Prädikatenlogik 1. Stufe ist aufgebaut aus

- K ... Menge der Konstanten
- V ... Menge der Variablen
- P ... Menge der Prädikate

Der Wahrheitswert einer Formel wird wie folgt definiert. Man gibt sich analog der Aussagenlogik eine reale Welt vor und bildet die Formeln in diese Welt ab. Diese Abbildung heißt *Interpretation*. Man überprüft nun Aussagen, indem man sie in die reale Welt abbildet und dort prüft, ob sie gelten oder nicht.

Zunächst gibt man sich einen Gegenstandsbereich G (in der Bezugswelt) vor. Die Menge G enthält die realen Bezugsobjekte:

$$I_{obj} : K \rightarrow G$$

Zusätzlich benötigt man in der Bezugswelt eine Menge R von Relationen. Die Prädikate werden auf Relationen der Bezugswelt abgebildet:

$$I_{prädikat} : P \rightarrow R$$

Der Wahrheitswert einer variablenfreien Formel wird dann wie folgt bestimmt:

Sei $p(a,b,c)$ die prädikatenlogische Formel. Man sucht die entsprechenden Objekte in der Bezugswelt. Die Objekte a, b, c werden mittels I_{obj}, in die Bezugswelt abgebildet:

$$a' = I_{obj}(a), b' = I_{obj}(b), c' = I_{obj}(c)$$

Entsprechend sucht man die zu p gehörende Relation:

$$p' = I_{prädikat}(p)$$

Man definiert nun, dass $p(a,b,c)$ wahr ist, genau dann, wenn gilt:

$$(a', b', c') \in p'$$

Man sagt: Die Formel ist wahr unter der Interpretation I.

Wie geht man mit den Quantifizierungen um? Man nimmt in die Interpretation I_{obj} die Menge der Variablen auf. Sie werden wie die Konstanten nach G abgebildet:

$$I_{obj} : K \cup V \rightarrow G$$

Sei die zu untersuchende Formel $\forall x\ p(x)$. Sie ist wahr unter der Interpretation I genau dann, wenn $p(x)$ für jede beliebige Interpretation I' wahr ist, wobei sich I' von I nur an der Stelle x unterscheiden darf.

Existenzquantifizierte Formeln werden analog behandelt. Es muss dann allerdings nur *mindestens eine* Interpretation I' geben.

Die Begriffe **Erfüllbarkeit**, **Falsifizierbarkeit**, **Tautologie**, **Widerspruch** (falsche Formeln) können analog der Definition 2.4 auf Seite 32 auch für die Prädikatenlogik eingeführt werden. Die in Satz 2.1 und Satz 2.2 auf Seite 33 hergestellten Beziehungen zwischen falschen, allgemeingültigen, erfüllbaren und falsifizierbaren Formeln gelten analog.

Sinngemäß wird der Begriff der semantischen Folgerung eingeführt. Der Modellbegriff wird wie in Definition 2.5 auf Seite 33 formuliert.

Definition 2.15 Semantische Folgerung

Sei X eine Menge prädikatenlogischer Formeln, Y eine prädikatenlogische Formel.

Y ist eine **semantische Folgerung** von X
oder
Y **folgt** aus X

falls jedes Modell von X auch Modell von Y ist. Man schreibt dafür $X \models Y$.

Automatische Verarbeitung prädikatenlogischer Formeln

Die Prädikatenlogik ist ausdrucksstärker als die Aussagenlogik. Dies ist für die Wissensrepräsentation günstig. Man kann nun auch Existenz- und All-Quantifizierungen repräsentieren, was aussagenlogisch nicht möglich ist. Im Folgenden wird untersucht, wie Wissen in Form von prädikatenlogischen Formeln automatisch verarbeitet werden kann.

Die Methode der Wahrheitswerttabellen (Aussagenlogik) ist aufgrund der Quantifizierungen in der Prädikatenlogik nicht anwendbar. Dagegen kann das in Abschnitt 2.3.1 erläuterte Vorgehen zum Aufbau von aussagenlogischen „Rechenregeln“ auf die Prädikatenlogik übertragen werden. Inferenzregeln werden eingeführt, um prädikatenlogische Formeln zu neuen Formeln verknüpfen zu können, bis man zu einer zu beweisenden Aussage gelangt.

Die Inferenzregel des **Modus ponens**

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

ist auf prädikatenlogische Formeln nicht ohne weiteres anwendbar.

Aus den Aussagen

- $\forall x\ ist\_GmbH(x) \rightarrow ist\_Firma(x)$
- $ist\_GmbH(planet\_ic)$

ist mit Hilfe des aussagenlogischen Modus ponens nicht ableitbar, dass

$ist\_Firma(planet\_ic)$

gilt. Es ist eine Inferenzregel erforderlich, die aus der Aussage

$\forall x\ ist\_GmbH(x) \rightarrow ist\_Firma(x)$

die Aussage ableitet:

$ist\_GmbH(planet\_ic) \rightarrow ist\_Firma(planet\_ic)$

All-Instantiierung

$$\frac{\forall x\ p(x)}{p(a)\ \ldots\ a \text{ ist eine beliebige Konstante}}$$

In dieser Weise kann man mit weiteren Inferenzregeln einen Berechnungsapparat aufbauen.

Stellt man die Frage nach der Vollständigkeit und Korrektheit (vgl. Definition 2.8 auf Seite 38) eines solchen Verfahrens und betrachtet die Komplexitätsprobleme, die erst recht bei prädikatenlogischen Formeln auftreten (vgl. Abschnitt 2.3.1), so ist der Wunsch naheliegend, das Resolutionsverfahren auf prädikatenlogische Formeln anzupassen.

Resolution

Das Grundprinzip des Resolutionsverfahrens bleibt erhalten:

- einheitliche Darstellung der Formeln (Normalform)
- Widerspruchsbeweis

Was muss modifiziert werden, damit das Resolutionsverfahren (für aussagenlogische Aussagen) auf die Prädikatenlogik übertragen werden kann?

Als einheitliche Darstellung wird analog der Aussagenlogik die konjunktive Normalform (vgl. Definition 2.11 auf Seite 40) verwendet. Sie baut auf den in Tabelle 2.8 auf Seite 39 aufgeführten Äquivalenzen für aussagenlogische Formeln auf. Diese Äquivalenzen gelten auch für prädikatenlogische Formeln. Zusätzlich gelten die in Tabelle 2.11 aufgeführten Äquivalenzen von prädikatenlogischen Formeln.

Tabelle 2.11 Prädikatenlogische Äquivalenzen

Bezeichnung	Äquivalenz
Negierter All-Quantor	$\neg \forall x\ Y \equiv \exists x\ \neg Y$
Negierter Existenz-Quantor	$\neg \exists x\ Y \equiv \forall x\ \neg Y$

Die Aussage

Es gilt nicht, dass für alle Studenten gilt, dass sie fleißig sind.

ist äquivalent zur Aussage

Es gibt (mindestens) einen Studenten, der nicht fleißig ist.

Die Transformation einer prädikatenlogischen Formel auf KNF kann analog zu dem in Listing 2.1 auf Seite 40 dargestellten Algorithmus erfolgen. Zusätzlich müssen die Quantoren behandelt werden. Zunächst wird exemplarisch das Eliminieren des Existenz-Operators erläutert. In der Formel

$$\forall x\ \exists y\ p(x, y)$$

kann der Existenz-Operator dadurch eliminiert werden, dass y durch $f(x)$ ersetzt wird. Dies ist dadurch motiviert, dass in obiger Aussage steht:

Für alle x gibt es ein y, so dass p(x, y) gilt.

Offensichtlich gibt es nicht einen bestimmten y-Wert, für den die Aussage gilt, sondern der y-Wert kann mit x variieren. Es gibt somit einen funktionalen Zusammenhang, der durch $f(x)$ ausgedrückt wird. Das Funktionssymbol f muss ein neues Symbol sein, es darf in keiner anderen Formel benutzt werden.

Dieses Verfahren zur Eliminierung wurde von dem norwegischen Mathematiker Albert Thoralf Skolem entwickelt und wird als **Skolemisierung** bezeichnet.

Man ersetzt die existenzquantifizierten Variablen durch eine neue Funktion, wobei alle Variablen, von denen die existenzquantifizierte Variable abhängt, berücksichtigt werden müssen. In Tabelle 2.12 sind Beispiele für die Skolemisierung angegeben.

Tabelle 2.12 Skolemisierung

Formel	skolemisierte Formel
$\forall x\ \exists y\ p(x,y)$	$\forall x\ p(x, f_1(x))$
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ p(x,y,z)$	$\forall x\ \forall y\ p(x,y,f_2(x,y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ p(x,y,z)$	$\forall x\ \forall y\ p(x,y,f_3(x))$
$\exists y\ \forall x\ p(x,y)$	$\forall x\ p(x,a_1)$

Die Konstante a_1 sowie die Funktionssymbole f_1, f_2, f_3 müssen neue Symbole sein.

In der vierten Zeile der Tabelle 2.12 ersetzen wir y nur durch eine Konstante, da y nicht von x abhängt. Die Aussage

Es gibt ein y, so dass für alle x gilt p(x, y).

bezieht sich auf *ein y*. Mit diesem y gilt dann für alle x : $p(x,y)$.

Die Aussage „Zu jeder Vorlesung gehört ein Dozent“ wird prädikatenlogisch formuliert:

$\forall x\ \mathit{vorlesung}(x) \rightarrow \exists y\ \mathit{dozent}(x,y)$

Der Name des Dozenten (y) hängt von der jeweiligen Vorlesung x ab. Folglich wird y durch $f_4(x)$ ersetzt:

$\forall x\ \mathit{vorlesung}(x) \rightarrow \mathit{dozent}(x, f_4(x))$

Die Skolemisierung verändert zwar die Formel, sie ist aber ausreichend zum Finden eines Widerspruchs. Existiert ein Widerspruch, so findet man diesen auch mit der skolemisierten Formel. Somit kann Resolution auch hier zum Beweisen verwendet werden.

In den Formeln sind nach der Skolemisierung nur noch Variablen enthalten, die allquantifiziert sind. Man lässt deshalb den All-Quantor in allen Formeln weg.

Die Transformation auf Konjunktive Normalform (Klauselnormalform) wird gegenüber Listing 2.1 um die Skolemisierung und das Entfernen der All-Quantoren erweitert (Listing 2.2).

Listing 2.2 Transformation auf Klauselnormalform (Prädikatenlogik)

```
PROCEDURE KLAUSELNORMALFORM
  Ersetze alle Äquivalenzen A ↔ B durch (A → B) ∧ (B → A);
  Ersetze alle Implikationen A → B durch  ¬A ∨ B;
  Verschiebe die Negation bis zu den aussagenlogischen Variablen;
  Entferne doppelte Negationen;
  Entferne Existenzquantoren (Skolemisierung);
  Entferne All-Quantoren;
  Transformiere auf KNF durch Ausmultiplizieren;
END
```

Gegebenenfalls ist es nötig, die Variablen umzubenennen, bevor die All-Quantoren weggelassen werden. Die folgende Formel – die Variable x sei beschränkt auf die natürlichen Zahlen – ist falsch:

$\forall x\ \mathit{gerade\_zahl}(x) \quad \vee \quad \forall x\ \mathit{ungerade\_zahl}(x)$

Lässt man bei der Transformation auf KNF die Quantoren einfach weg, entsteht die Formel

$$gerade\_zahl(x) \vee ungerade\_zahl(x)$$

Diese entspricht aber der wahren Aussage

$$\forall x\ gerade\_zahl(x) \vee ungerade\_zahl(x)$$

Daher lösen wir zunächst das doppelte Verwenden der Variablen x durch Umbenennen auf. Erst dann lassen wir die All-Quantoren weg.

$$gerade\_zahl(x) \vee ungerade\_zahl(y)$$

Ausgangspunkt für das automatische Beweisen ist auch bei prädikatenlogischen Formeln die Frage (vgl. Definition 2.6 auf Seite 35), ob

$$X \models Y$$

gilt. Dies kann wieder auf die Frage zurückgeführt werden, ob

$$X \wedge \neg Y$$

widersprüchlich ist (vgl. Satz 2.3 auf Seite 41). Man nimmt also die Negation der Behauptung, das heißt der zu beweisenden Aussage, hinzu und sucht nach einem **Widerspruch**.

Wir setzen wieder die **konjunktive Normalform (KNF)** voraus:

$$(A \vee \ldots \vee B) \wedge \ldots \wedge (X \vee \ldots \vee Y)$$

Analog zur Aussagenlogik wird alternativ die Mengenschreibweise verwendet:

$$\{\{A,\ldots,B\},\ldots,\{X,\ldots,Y\}\}$$

Alternativ kann man die Klauseln – ohne die Verknüpfung durch das Und – aufzählen:

$$\{A,\ldots,B\}$$
$$\ldots$$
$$\{X,\ldots,Y\}$$

A, B, X, Y sind **Literale**, also atomare prädikatenlogische Formeln oder deren Negation, beispielsweise *gerade_zahl(x)* und $\neg$*vorlesung(x)* (vgl. Definition 2.10 auf Seite 40).

Die aussagenlogische Resolutionsregel ist auf prädikatenlogische Formeln nur mit einer Modifikation übertragbar. Auf die Klauseln

$\{\neg ist\_GmbH(x),\ ist\_Firma(x)\}$
$\{ist\_GmbH(planet\_ic)\}$

kann die aussagenlogische Resolution nicht angewendet werden, da die Literale

$$ist\_GmbH(x) \quad \text{und} \quad ist\_GmbH(planet\_ic)$$

nicht identisch sind. Da x eine Variable ist, kann sie aber mit dem Wert *planet_ic* belegt werden. Nun sind beide Literale identisch.

Die Resolutionsregel muss somit um den Freiheitsgrad erweitert werden, dass Variablen belegt werden können.

Definition 2.16 Unifizierbarkeit

Zwei Literale L_1 und L_2 heißen **unifizierbar**, wenn es eine Variablensubstitution s gibt, so dass gilt:

$$s(L_1) = s(L_2)$$

Die Variablensubstitution heißt **Unifikator** von L_1 und L_2.

Unifikation sucht nach einer Belegung der Variablen, so dass beide Objekte danach identisch sind. Für die Resolution benötigt man einen allgemeinsten, schwächsten Unifikator (**most general unifier, mgu**). Der schwächste Unifikator ist dadurch ausgezeichnet, dass sich jeder beliebige Unifikator aus ihm ableiten lässt (vgl. Kapitel 4).

Die Resolutionsregel für prädikatenlogische Formeln ist in Definition 2.17 formuliert. Wir verwenden die Mengenschreibweise.

Definition 2.17 Resolutionsregel Prädikatenlogik

Seien C_1, C_2 Klauseln, L_1 und L_2 positive Literale. Es gelte:

- $L_1 \in C_1$
- $\neg L_2 \in C_2$

Sei s ein allgemeinster Unifikator für die Literale L_1 und L_2: $s(L_1) = s(L_2)$.

Dann heißt die Klausel

$$s(\,(C_1 \setminus \{L_1\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg L_2\})\,)$$

Resolvente von C_1 und C_2.

Die Resolutionsregel kann alternativ wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_m \qquad \neg M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_n}{s(L_2 \vee \ldots \vee L_m \vee M_2 \vee \ldots \vee M_n)}$$

L_1 und M_1 sind unifizierbar mit dem mgu s.

Hier muss die Idempotenz (Tabelle 2.8 auf Seite 39) des logischen Oder berücksichtigt werden, doppelte Literale können entfernt werden.

Beispiel 2.7 Faktorisierung

In einem Dorf gibt es genau einen Barbier. Über die Bewohner des Dorfes ist bekannt, dass der Barbier genau die Personen rasiert, die sich nicht selbst rasieren:

- $\forall x\ \mathit{rasiert}(x,x) \vee \mathit{rasiert}(\mathit{barbier},x)$
- $\neg\exists y\ \mathit{rasiert}(y,y) \wedge \mathit{rasiert}(\mathit{barbier},y)$

In Klauselform erhält man:

- $\{\ \mathit{rasiert}(x,x), \mathit{rasiert}(\mathit{barbier},x)\ \}$
- $\{\ \neg\mathit{rasiert}(y,y), \neg\mathit{rasiert}(\mathit{barbier},y)\ \}$

Diese Klauseln sind offensichtlich widersprüchlich, was wir mit der Resolutionsregel aber nicht beweisen können. Man muss Unifizierbarkeit innerhalb einer Klausel zulassen. In beiden Klauseln sind die jeweils enthaltenen zwei Literale

unifizierbar. Unter Beachtung der Idempotenz (siehe Tabelle 2.8 auf Seite 39) des Oder erhalten wir diese Klauseln:

- $\{ \mathit{rasiert}(\mathit{barbier}, \mathit{barbier}) \}$
- $\{ \neg \mathit{rasiert}(\mathit{barbier}, \mathit{barbier}) \}$

Mit diesen Klauseln findet Resolution den Widerspruch.

Die in Beispiel 2.7 auf der vorherigen Seite motivierte Inferenzregel wird **Faktorisierung** genannt.

$$\frac{\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}}{s\{L_2, \ldots, L_m\}} \qquad L_1 \text{ und } L_2 \text{ sind unifizierbar mit dem mgu } s.$$

Die Aussage über die Korrektheit kann auch für die prädikatenlogische Resolution formuliert werden (vgl. Satz 2.4).

Satz 2.6 Korrektheit der Resolutionsregel (Prädikatenlogik)

Die Resolutionsregel ist korrekt. Ist X eine Klauselmenge und Y eine Resolvente von zwei Klauseln aus X, so sind X und $X \cup \{Y\}$ äquivalent. ■

Auch die Widerlegungsvollständigkeit der prädikatenlogischen Resolution ist gegeben (vgl. Satz 2.5).

Satz 2.7 Widerlegungsvollständigkeit der Resolution (Prädikatenlogik)

Ist die Klauselmenge widersprüchlich, so existiert eine endliche Folge von Resolutions- oder Faktorisierungsschritten, die zum Widerspruch führt. ■

Beispiel 2.8 Beweisen mittels Resolution

Gegeben sind die Aussagen:

1. Politiker mögen niemanden, der knausrig ist.
2. Jeder Politiker mag eine Firma.
3. Es gibt Politiker.

Zu beweisen ist, dass es eine Firma gibt, die nicht knausrig ist. Die Aussagen werden in prädikatenlogische Formeln übersetzt.

1. $\forall x \; \forall y \; \mathit{politiker}(x) \wedge \mathit{knausrig}(y) \rightarrow \neg \mathit{mag}(x, y)$
2. $\forall x \; \mathit{politiker}(x) \rightarrow \exists y \; \mathit{firma}(y) \wedge \mathit{mag}(x, y)$
3. $\exists x \; \mathit{politiker}(x)$

Die zu beweisende Aussage wird negiert hinzugenommen.

1. $\neg \exists x\, firma(x) \wedge \neg knausrig(x)$

Diese Formeln werden in KNF überführt. Beachten Sie, dass die Variablen umbenannt wurden, denn die Variablen x in Formel 1 und 2 sind unterschiedlich.

1. $\neg politiker(x_1) \vee \neg knausrig(y) \vee \neg mag(x_1, y)$
2. $\neg politiker(x_2) \vee firma(f(x_2))$
3. $\neg politiker(x_3) \vee mag(x_3, f(x_3))$
4. $politiker(a)$
5. $\neg firma(x_4) \vee knausrig(x_4)$

Das Funktionssymbol f und die Konstante a wurden durch die Skolemisierung eingeführt. Nun folgen die Resolutionsschritte:

Verwendete Klauseln	Resolvente	Nr
1+4	$\neg knausrig(y) \vee \neg mag(a, y)$	6
2+4	$firma(f(a))$	7
3+4	$mag(a, f(a))$	8
6+8	$\neg knausrig(f(a))$	9
5+9	$\neg firma(f(a))$	10
7+10	Widerspruch	

Mit dem Finden des Widerspruchs ist die Hypothese, dass es Firmen gibt, die nicht knausrig sind, bewiesen.

Strategien

Der Satz 2.7 trifft nur eine Aussage über die Existenz eines endlichen Weges zum Widerspruch. Dies ist nur eine qualitative Aussage.

Da unser Ziel die automatische **Wissensverarbeitung**, das Beweisen einer Aussage mittels eines Computerprogramms ist, muss die Komplexität des Verfahrens berücksichtigt werden. Hierüber wird im Satz 2.7 auf der vorherigen Seite keine Aussage getroffen. Ohne auf theoretische Resultate einzugehen: Resolutionsbeweise weisen im Allgemeinen einen hohen Verzweigungsgrad auf, da in jedem Schritt viele Alternativschritte zur Verfügung stehen. Daher hat man schon frühzeitig nach Strategien gesucht, die die Anwendung der Resolutionsregel einschränken oder steuern, ohne dass die Widerlegungsvollständigkeit verloren geht.

Man kann Überlegungen zur zielgerichteten Suche (vgl. Kapitel 3) auf das Resolutionsverfahren anwenden. Beispielsweise eignet sich die Bestensuche zur Steuerung des Resolutionsverfahrens. Ziel des Resolutionsbeweises ist das Finden der leeren Klausel, der Klausel mit 0 Literalen. Es ist also sinnvoll, möglichst „kurze“ Klauseln zu bevorzugen. Als Maß für die Güte einer Klausel kann ihre Länge verwendet werden.

Eine weitere Strategie ist die **Set-Of-Support-Strategie** (SOS). Diese erlaubt Resolution nur, wenn mindestens eine Elternklausel einen direkten Bezug zur zu beweisenden Formel hat. Nur

die zu beweisenden Aussagen (in ihrer negierten Form) gehören zunächst zur *Set of Support* (Trägermenge). In jedem Resolutionsschritt muss mindestens eine Eltern-Klausel aus der SOS kommen. Die Resolvente wird in die SOS aufgenommen.

Die Effizienz des Resolutionsverfahrens kann auch verbessert werden, indem nutzlose Klauseln erkannt und gelöscht werden. Dies ist für eine automatische Verarbeitung vorteilhaft, da unnötige Schritte vermieden werden.

Die aussagenlogische Klausel $\{L, \neg L\}$ wird zum Finden des Widerspruchs keinen Beitrag leisten können, denn ein beliebiger Resolutionsschritt mit dieser Klausel und einer Klausel K erzeugt exakt die Klausel K. Die Klausel $\{L, \neg L\}$ ist eine Tautologie. Man kann generell Klauseln löschen, die **Tautologien** sind. Diese sind für einen Resolutionsbeweis unnötig.

Vergleicht man die Klauseln $\{L_1\}$ und $\{L_1, L_2\}$, so stellt man fest, dass die Klausel $\{L_1\}$ „stärker" als die Klausel $\{L_1, L_2\}$ ist. Sie enthält mehr Information, denn wenn L_1 gilt, dann gilt auch $L_1 \vee L_2$. Man bezeichnet dies als **Subsumption**. Eine Klausel K_1 subsumiert eine Klausel K_2, wenn gilt $K_1 \subseteq K_2$. Auch subsumierte Klauseln kann man in einem Resolutionsbeweis vernachlässigen. Die Widerlegungsvollständigkeit bleibt erhalten.

Resümee

Logik ist eine sehr ausdrucksstarke Form der Wissensrepräsentation. Mit Hilfe der Resolution können Beweise automatisiert werden. Damit ist Wissensverarbeitung – die Verarbeitung von logischen Aussagen durch ein Programm – möglich.

Unter *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* stellen wir einen prädikatenlogischen Resolutionsbeweiser sowie eine Reihe von Beispielen und ergänzende Informationen zum Probieren zur Verfügung.

2.3.3 Logik und PROLOG

Die Logik ist für die Wissensverarbeitung von immenser Bedeutung. Für viele Anwendungsbereiche ist allerdings die volle Ausdrucksmächtigkeit der Prädikatenlogik nicht erforderlich. Ausreichend sind häufig Formeln der Form:

- **Regeln**: Wenn B_1 und B_2 und … B_n gelten, dann gilt auch K. Dies entspricht der logischen Formel $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow K$.
  In Klauselschreibweise: $\{\neg B_1, \neg B_2, \ldots, \neg B_n, K\}$.
- **Fakten**: $\{C\}$
- **Anfragen** der Form: „Folgt aus dem gegebenen Wissen, dass $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m$ gilt?".
  Entsprechend des Vorgehens beim Resolutionsbeweis wird die Anfrage negiert:
  $\{\neg H_1, \neg H_2, \ldots, \neg H_m\}$.

Alle drei Formen enthalten maximal ein positives Literal. Man bezeichnet diese Klauseln als **Horn-Klauseln**.

Eine **Zielklausel** (Anfrage) unterscheidet sich von den anderen beiden Formen dadurch, dass sie *kein* positives Literal enthält. Regeln und Fakten enthalten exakt ein positives Literal.

Die in Kapitel 4 eingeführte Programmiersprache PROLOG basiert auf diesen speziellen Klauseln. Tabelle 2.13 zeigt PROLOG-Formeln sowie ihre entsprechende Klauselschreibweise.

Tabelle 2.13 PROLOG und Hornklauseln

	PROLOG	Horn-Klausel
Regel	`Kopf :- B1, B2, . . . , Bn.`	{Kopf, ¬B1, ¬B2, . . . , ¬Bn}
Fakt	`Literal.`	{Literal}
Anfrage (Ziel)	`:- A1, . . . , Am.`	{ ¬A1, . . . , ¬Am}

PROLOG benutzt eine spezielle Form der Resolution, die **SLD-Resolution**. Die Abkürzung SLD steht für *Linear Resolution with Selection Function for Definite Clauses.*

SLD-Resolution zeichnet sich durch diese Charakteristika aus:

- SLD-Resolution geht linear vor. Die eben erzeugte Resolvente wird sofort zur Resolution benutzt, sie ist eine der „Elternklauseln" für den nächsten Resolutionsschritt.
- Die andere Elternklausel ist stets eine Klausel aus der gegebenen Wissensbasis.
- Ausgangspunkt des Beweises ist die Zielklausel.
- In jedem Resolutionsschritt wird das erste der noch zu beweisenden Literale bearbeitet.

SLD-Resolution schränkt die Vielfalt der möglichen Resolutionsschritte deutlich ein. Die Widerlegungsvollständigkeit bleibt aber erhalten. Dies ist darin begründet, dass auch nur eine eingeschränkte Teilmenge der Prädikatenlogik betrachtet wird.

Beispiel 2.9 PROLOG und SLD-Resolution

Gegeben seien die Aussagen:

PROLOG	Klauseln	Nr

`kreditwuerdig(X) :-`
`  geringe_Schulden(X),`
`  sicheres_Einkommen(X).`
	{*kreditwuerdig*(X),
	¬*geringe_Schulden*(X),
	¬*sicheres_Einkommen*(X)}
		1

`geringe_Schulden(schneider).`	{*geringe_Schulden*(*schneider*)}	2
`sicheres_Einkommen(X) :-` `  hohes_Einkommen(X).`	{*sicheres_Einkommen*(X), ¬*hohes_Einkommen*(X)}	3
`hohes_Einkommen(schneider).`	{*hohes_Einkommen*(*schneider*)}	4

Nun folgt der Beweis der Kreditwürdigkeit von Schneider sowohl in PROLOG als auch mittels Resolution.

PROLOG	Klauseln		Nr
`:- kreditwuerdig(schneider).`	{¬*kreditwuerdig*(*schneider*)}		5
`:- geringe_Schulden(schneider),` `  sicheres_Einkommen(schneider).`	{¬*geringe_Schulden*(*schneider*), ¬*sicheres_Einkommen*(*schneider*)}	5+1	6
`:- sicheres_Einkommen(schneider).`	{¬*sicheres_Einkommen*(*schneider*)}	6+2	7
`:- hohes_Einkommen(schneider).`	{¬*hohes_Einkommen*(*schneider*)}	7+3	8
`:-`	{ }	8+4	

Zusammenfassung

Sowohl **Aussagenlogik** als auch **Prädikatenlogik** sind formale Sprachen zur **Wissensrepräsentation**. Mit dem Resolutionsverfahren ist ein leistungsstarkes Verfahren zum automatischen Beweisen gegeben. PROLOG ist eine Programmiersprache, die auf einer Teilmenge der Prädikatenlogik, den Horn-Klauseln aufbaut.

Die klassische Logik ist zweiwertig. Jede Aussage ist wahr oder falsch. Mit unsicheren Aussagen wie „Morgen wird es regnen“ oder unscharfen Aussagen „Der Mann ist groß“ kann die klassische Logik nicht adäquat umgehen.

Auf die Abarbeitung, die Reihenfolge der Beweisschritte hat man im klassischen Resolutionsverfahren keinen Einfluss. Die in PROLOG implementierte SLD-Resolution dagegen erlaubt durch eine geeignete Reihenfolge der Klauseln oder durch eine adäquate Reihenfolge der Literale in einer Klausel eine Einflussnahme auf die Abarbeitung.

Es gibt eine Reihe von Erweiterungen der klassischen Logik. In Abschnitt 2.6 wird gezeigt, wie mit vagem Wissen umgegangen werden kann. Bezüglich weiterer Erweiterungen der klassischen Logik wie Default-Logiken oder modale Logiken sei auf die Literatur verwiesen [GRS13], [FHMV03].

Übung 2.1 Implikation

Wie drückt man $\wedge$ mit Hilfe von $\rightarrow$ und $\neg$ aus?

Übung 2.2 Implikation

Kann man $A \leftrightarrow B$ mit Hilfe der Implikation $\rightarrow$ und der Konjunktion $\wedge$ äquivalent darstellen?

Übung 2.3 Aussagenlogik

Vereinfachen Sie die Formel: $(A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C))$.

Übung 2.4 KNF

Wandeln Sie die Formel $\neg((A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D))$ in die konjunktive Normalform um.

Übung 2.5 Resolution – Aussagenlogik

Beweisen Sie mittels Resolution, dass B gilt, falls die folgende Formel gilt:

$$(B \rightarrow (A \vee C)) \wedge (B \vee C) \wedge (A \rightarrow C) \wedge \neg(\neg B \wedge C)$$

Übung 2.6 Resolution – Aussagenlogik

Beweisen Sie mit Resolution, dass $((A \leftrightarrow (B \rightarrow C)) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow \neg C))$ falsch ist.

Übung 2.7 Resolution – Prädikatenlogik

Seien die Aussagen gegeben:

- Die Mitglieder des Clubs sind Joe, Sally, Bill und Ellen.
- Joe und Sally sind verheiratet.

- Bill und Ellen sind Geschwister.
- Ist ein Clubmitglied verheiratet, dann ist automatisch auch der Ehepartner Clubmitglied.
- Das letzte Treffen fand im Haus von Joe statt.

Beweisen Sie, dass

- das letzte Treffen in Sallys Haus stattfand,
- Ellen nicht verheiratet ist.

Ergänzen Sie dabei die fehlenden Zusammenhänge.

Übung 2.8 Resolution – Prädikatenlogik

Bernd, Lutz und Jochen werden verdächtigt, einen Hoteldiebstahl begangen zu haben. Bekannt ist:

- Genau einer der drei ist der Täter.
- Der Dieb muss im Hotel gewesen sein.
- Keiner der drei sagt die Wahrheit.
- Lutz sagt: Ich war es nicht, Bernd war es, ich war nicht im Hotel.
- Bernd sagt: Ich war es nicht. Alles was Lutz gesagt hat, ist gelogen. Jochen ist auch unschuldig.
- Jochen sagt: Ich war es nicht. Es stimmt, dass Lutz im Hotel war. Bernds zweite Aussage ist gelogen.

Finden Sie den Schuldigen. Verwenden Sie dazu auch den unter *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* verfügbaren Beweiser.

Übung 2.9 Wahrheitswerttabelle

Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle, dass $\neg A \vee B$ äquivalent zu $A \rightarrow B$ ist.

Übung 2.10 Resolution – Prädikatenlogik

Berechnen Sie alle Resolventen aus $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$. Verwenden Sie dabei auch die Resolventen wieder zur Resolution.

Übung 2.11 Prädikatenlogik – Umwandlung von Aussagen

Übersetzen Sie folgende Sätze in prädikatenlogische Formeln:

- Alle Informatiker können programmieren.
- Jeder Bundesbürger verhält sich einer Partei gegenüber loyal.
- Jede Firma zahlt Steuern.
- Jede GmbH ist eine Firma.

Übung 2.12 Resolution – Prädikatenlogik

Gegeben seien die Aussagen:

- Pferde sind schneller als Hunde.
- Es gibt einen Windhund, der schneller als jeder Hase ist.
- Fury ist ein Pferd.
- Bunny ist ein Hase.

Beweisen Sie mittels Resolution, dass Fury schneller als Bunny ist.

Übung 2.13 Äquivalenz von Formeln

Sind die Formeln $\forall x\ (p(x)\ \wedge\ q(x))$ und $\neg\exists x\ (\neg p(x)\ \vee\ \neg q(x))$ äquivalent? Begründen Sie Ihre Vermutung. Kann man Ihre Vermutung mittels Resolution beweisen?

Übung 2.14 Resolution

Lösen Sie das Knobel-Problem über die drei Programmierer. Ergänzen Sie die fehlenden Formeln und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels Resolution.

Übung 2.15 Logische Regeln

Stellen Sie das in Abschnitt 6.4.2 behandelte Problem über die Kreditwürdigkeit als logische Regeln dar. Wie viele Regeln benötigen Sie?

Übung 2.16 Resolution

Hatte der Täter B in Beispiel 2.5 auf Seite 45 einen Komplizen? Begründen Sie Ihre Vermutung.

Übung 2.17 Aussagen- vs. Prädikatenlogik

Untersuchen Sie, wann es sinnvoll ist, mit Aussagenlogik zu arbeiten. Wann ist es erforderlich, Prädikatenlogik zu verwenden?

Übung 2.18 Frege und Peano

Die Prädikatenlogik geht auf den in Wismar geborenen Gottlob Frege und den Italiener Peano zurück, die die Grundlagen für die Prädikatenlogik in der heutigen Form schufen. Vergleichen Sie die von Frege und Peano geleisteten Beiträge mit der heutigen Form der Aussagen- und Prädikatenlogik.

Übung 2.19 Syllogismen

Stellen Sie die von Aristoteles eingeführten Syllogismen vor. Finden Sie die entsprechenden prädikatenlogischen Formulierungen.

2.4 Regelbasierte Wissensdarstellung

Eine Form der Wissensdarstellung, die insbesondere bei der Entwicklung von wissensbasierten Systemen und Expertensystemen eingesetzt wurde und wird, sind Regeln. Allerdings sind hiermit nicht nur logische Abhängigkeiten gemeint, sondern auch Regeln, wie sie in der täglichen Sprache häufig verwendet werden:

- Wenn die Geschwindigkeit zu hoch ist, dann bremse.
- Wenn eine Aktie zu fallen droht, dann verkaufe sie.

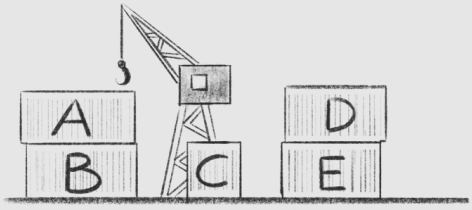
Dies sind Regeln, die Aktionen oder Schlussfolgerungen von bestimmten Voraussetzungen abhängig machen. Regeln können also diese Gestalt haben:

WENN Bedingungen DANN Schlussfolgerung
WENN Bedingungen DANN Aktion

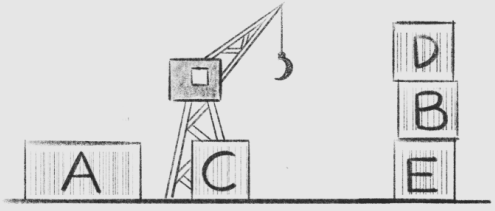
Der Bedingungsteil kann dabei aus mehreren Teilbedingungen bestehen. Diese Darstellungsform hat sich als vorteilhaft herausgestellt, da sie im Alltag häufig benutzt wird und somit auf eine für uns natürliche Weise Zusammenhänge oder auszuführende Aktionen beschreibt.

Beispiel 2.10 Containerlager

In einem Lager sind Container umzuschlagen.



Die Container sind so umzustapeln, dass sich folgende Situation ergibt:



Der Kran kann jeweils nur einen Container versetzen. Wann kann ein Container transportiert werden? Der Container muss oben stehen, das heißt es darf kein weiterer auf ihm stehen. Dies kann in Form einer Regel formuliert werden.

WENN Container steht auf PlatzX UND Container steht oben
DANN Setze Container von PlatzX nach PlatzY

In Beispiel 2.10 ist in der einzigen erforderlichen Regel die Ausführung des Umsetzens eines Containers von Vorbedingungen abhängig. Diese Regel ist eine Aktionsregel. Natürlich wird es mit dieser einen Regel nicht möglich sein, eine effiziente Folge von Aktionen zur Erreichung des Ziels zu finden. Diese Regel benutzt keine Informationen über das zu erreichende Ziel.

Beispiel 2.11 Firmengründung

Wir wollen eine Firma gründen. Dabei sind eine Reihe von Aspekten zu berücksichtigen. Es wird nur auf einen Ausschnitt der Kriterien eingegangen.

1. Haftung: Haftet der Unternehmer beziehungsweise der Gesellschafter oder die Gesellschaft? Soll die Haftung beschränkt oder unbeschränkt sein?
2. Steuerliche Aspekte: Sollen die Personen oder das Unternehmen besteuert werden?
3. Gründungsmitglieder: Wie viele Gründungsmitglieder sind beteiligt?
4. Vertrag: Mit welcher Vertragsform soll die Firmengründung erfolgen?

Die folgenden Regeln widerspiegeln einen Teil der Kriterien und deren Verknüpfung:

WENN Einpersonen_Gesellschaft UND Person_besteuert UND volle_Haftung
DANN Einzelunternehmen_gründen
WENN beliebige_Gesellschaft UND Unternehmen_besteuert
UND beschränkte_Haftung UND Sacheinlage_25T€
DANN GmbH_gründen
WENN beliebige_Gesellschaft UND Unternehmen_besteuert
UND Haftung_mit_Stammeinlage UND Sacheinlage_50T€
DANN AG_gründen

Die Gründung eines Einzelunternehmens wird aufgrund dieser Regeln empfohlen, falls genau eine Person an der Firmengründung beteiligt ist, die Person besteuert werden soll sowie die volle Haftung übernommen wird.

In Beispiel 2.11 wird ein Ausschnitt aus einer Wissensbasis dargestellt, die Regeln für die Firmengründung enthält. In diesem Beispiel werden beide Typen von zulässigen Regeln verwendet. Die Regel

WENN Anzahl_der_Personen = 1 DANN Einpersonen_Gesellschaft

kann als **Schlussfolgerung** interpretiert werden, die Regel

WENN Einpersonen_Gesellschaft UND Person_besteuert UND volle_Haftung
DANN Einzelunternehmen_gründen

als **Aktionsregel**.

Ein Regel-basiertes System besteht aus zwei Komponenten:

1. **Wissensbasis**
2. **Verarbeitungskomponente**

Die Wissensbasis besteht aus:

1. **Regelbasis**
2. **Fakten oder Datenbasis**

Die Regeln beschreiben die möglichen Schlussfolgerungen oder Aktionen. Die Fakten beschreiben die vorausgesetzten Tatsachen oder den aktuellen Zustand des Systems.

Regeln und Fakten beschreiben unterschiedliche Sachverhalte. Regeln stellen allgemeine Zusammenhänge dar, die unabhängig von der jeweiligen Situation gelten. In Beispiel 2.11 auf der vorherigen Seite gelten die Regeln unabhängig davon, ob in einem konkreten Fall die Haftung unbeschränkt sein oder das Unternehmen besteuert werden soll. Fakten dagegen beschreiben einen speziellen Anwendungsfall.

Anzahl_der_Personen = 3
Unternehmen_besteuert

Anfragen, die das zu lösende Problem darstellen, werden durch die Verarbeitungskomponente bearbeitet. Dabei werden die gegebenen Fakten und Regeln verknüpft.

Die Verarbeitung in einem regelbasierten System kann auf unterschiedliche Art erfolgen. Zum einen kann von den vorhandenen Fakten ausgegangen werden. Mittels der Anwendung von Regeln werden Schlussfolgerungen gezogen oder Aktionen ausgeführt, die den Zustand des Systems modifizieren. Dies wird wiederholt, bis ein gewünschter Zielzustand erreicht ist. Dieses Vorgehen nennt man **Vorwärtsverkettung**. Man kann aber auch von der gestellten Anfrage ausgehen, beispielsweise ob ein Einzelunternehmen gegründet werden sollte. Dann sucht man eine entsprechende Regel, die auf ein Einzelunternehmen schließen lässt.

WENN Einpersonen_Gesellschaft UND Person_besteuert UND volle_Haftung
DANN Einzelunternehmen_gründen

Die Bedingungen müssen überprüft werden: Soll es eine Einpersonen-Gesellschaft sein, soll die Person besteuert werden und soll die Haftung unbeschränkt sein? Sind für diese Bedingungen keine Fakten vorhanden, wird nach entsprechenden Regeln für die Bedingungen gesucht. Dieses Vorgehen wird als **Rückwärtsverkettung** bezeichnet.

Es gibt zwei grundsätzliche Vorgehen bei der Verarbeitung von Regel-Systemen:

1. **unwiderrufliche Strategien**
2. **versuchsweise Strategien**

Unwiderrufliche Strategien wählen aus der Menge aller anwendbaren Regeln exakt eine Regel aus und führen sie aus. Dies birgt in sich die Gefahr, dass diese Regel nicht zum Erfolg führt und damit keine Lösung gefunden wird.

Strategien, die versuchsweise vorgehen, wählen eine mögliche Regel aus und wenden diese an. Sie merken sich aber gleichzeitig alternative Regeln. Führt die Regelanwendung nicht zum Ziel, werden Alternativen versucht.

2.4.1 Vorwärtsverkettung

Die Abarbeitung in einem vorwärts verkettenden System ist in Bild 2.5 dargestellt.

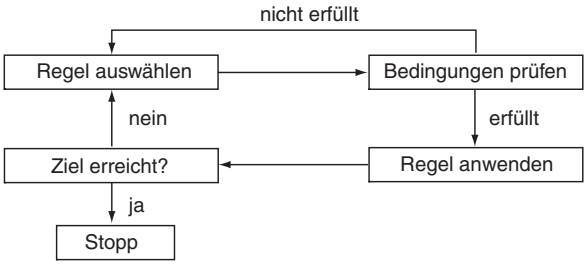


Bild 2.5 Regelverarbeitung – Vorwärtsverkettung

Bei der Vorwärtsverkettung wird von den vorhandenen Fakten ausgegangen. Es wird eine Regel ausgewählt. Die Bedingungen der Regel werden überprüft. Sind sie nicht erfüllt, wird nach einer weiteren anwendbaren Regel gesucht. Sind die Bedingungen erfüllt, wird die Regel angewendet. Dies wird wiederholt, bis ein Zielkriterium erfüllt ist.

Die Regelverarbeitung enthält also Komponenten zur:

- Auswahl einer geeigneten Regel,
- Überprüfung der Bedingungen,
- Anwendung der Regel.

Eine einfache Variante eines vorwärts verkettenden Systems in PROLOG in Anlehnung an [BCF88] basiert auf den folgenden PROLOG-Regeln:

```
ausfuehren_regel_system(Pfad,Loesung) :
     ziel_erreicht,!,Loesung=Pfad.
ausfuehren_regel_system(Pfad, Loesung) :
     Name : Bedingungen => RHS,
     bedingungen_erfuellt(Bedingungen),
     ausfuehren_rhs(RHS),
     ausfuehren_regel_system([Name|Pfad],Loesung).
```

In der ersten PROLOG-Regel wird überprüft, ob die Zielsituation erreicht ist. Falls dies nicht der Fall ist, wird eine Regel gesucht, deren Bedingungen erfüllt sind. Diese Regel wird ausgeführt. Anschließend geht die Regelanwendung in den nächsten Zyklus. Als Lösung interessiert im Allgemeinen nur, in welcher Reihenfolge welche Regeln angewendet werden, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen. Deshalb sind die Regeln benannt, die Folge der Regelnamen bildet die Lösung.

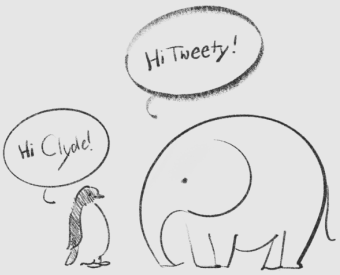
Die zwei Arten von Regeln (Schlussfolgerungsregeln, Aktionsregeln) müssen unterschiedlich behandelt werden. Aus der Anwendung einer Schlussfolgerungsregel entsteht (mindestens) ein neuer Fakt, der dann als „neues“ Wissen zur Verfügung steht.

Beispiel 2.12 Vorwärtsverkettung

1. WENN ist_Elefant(X) DANN ist_Säugetier(X)
2. WENN ist_Katze(X) DANN ist_Säugetier(X)
3. WENN ist_Pinguin(X) DANN ist_Vogel(X)
4. WENN ist_Säugetier(X) DANN ist_Lebewesen(X)
5. WENN ist_Vogel(X) DANN ist_Lebewesen(X)
6. ist_Elefant(Clyde)
7. ist_Pinguin(Tweety)

Die Vorwärtsverkettung ist in folgender Tabelle dargestellt. Jede Schlussfolgerung wird als Fakt in die Wissensbasis aufgenommen und kann verwendet werden.

Regel	Neuer Fakt	
1	ist_Säugetier(Clyde)	8
3	ist_Vogel(Tweety)	9
4	ist_Lebewesen(Clyde)	10
5	ist_Lebewesen(Tweety)	11



Das Anwenden einer Aktionsregel stellt dagegen eine Modifikation dar, die den Zustand unseres Systems verändert. Im Beispiel 2.10 auf Seite 65 ist eine solche Aktion das Versetzen eines Containers. Transportiert man den Container D auf einen anderen Platz, so müssen wir die Information, dass Container D jetzt auf einem anderen Platz liegt, aktualisieren. Die universelle Regel für das Verschieben eines Containers sieht folgendermaßen aus:

```
container-Cont-von-PlatzX-nach-PlatzY:
   [oben(Cont), steht_auf(Cont, PlatzX),
    platz(PlatzY), PlatzX \== PlatzY]
=>
   [entfernen(Cont, PlatzX), setzen(Cont, PlatzY)].
```

Ein Container Cont kann von `PlatzX` nach `PlatzY` umgesetzt werden, wenn

- der Container `Cont` auf `PlatzX` steht,
- der Container `Cont` ganz oben steht, also auf ihm kein weiterer Container steht,
- `PlatzX` und `PlatzY` nicht identisch sind.

Die veränderte Situation nach dem Umsetzen muss sich in der rechten Seite der Regel wiederfinden.

- Der Container `Cont` wird vom `PlatzX` entfernt.
- Der Container `Cont` steht nun auf `PlatzY`.

Die Aktion führt zu einer Veränderung der Faktenbasis.

Es ist offensichtlich, dass die universelle Regel für das Umsetzen eines Containers relativ blind agieren wird, da kein Wissen über den zu erreichenden Zielzustand verwendet wird.

Beispiel 2.13 Containerlager (fortgesetzt)

Die einzige Regel

WENN Container steht auf PlatzX UND Container steht oben
DANN Setze Container von PlatzX nach PlatzY

wird ergänzt, um ein zielgerichtetes Vorgehen zu ermöglichen.

Da die Zielplätze für die Container bekannt sind, kann diese Information genutzt werden.

Steht ein Container auf PlatzX oben, und ist der zugehörige Zielplatz frei,
so setze den Container dorthin.

Als Regel in der PROLOG-Implementierung:

```
container-Cont-von-PlatzX-nach-Ziel:
   [oben(Cont), zielplatz(Cont, Ziel),
    steht_auf(Cont, PlatzX), PlatzX \== Ziel]
=>
   [entfernen(Cont ,PlatzX), setzen(Cont, Ziel)].
```

Das Prädikat `zielplatz/2` überprüft nicht nur, ob beispielsweise der Container B auf den Waggon gestellt werden soll. Es muss auch kontrolliert werden, ob dort bereits E (und nur E) liegt.

Nimmt man diese zweite Regel hinzu, so wird eine Aktionsfolge, die zum Ziel führt, gefunden:

```
container - a - von - lager1 - nach - waggon
container - b - von - lager1 - nach - lager2
container - a - von - waggon - nach - lager1
container - d - von - lkw - nach - lager1
container - e - von - lkw - nach - waggon
container - b - von - lager2 - nach - waggon
container - d - von - lager1 - nach - waggon
```

Die optimale Aktionsfolge benötigt weniger Aktionen, und zwar sechs. Dies ist aber weniger ein Problem der Regelverarbeitung. Vielmehr ist dies in dem von uns zur Verfügung gestellten Wissen über den Gegenstandsbereich begründet. Eine unzureichende Spezifikation verursacht ineffiziente oder nicht optimale Lösungen. Nimmt man zusätzliches Wissen hinzu, lässt sich das Verhalten verbessern. Beispielsweise steht hier im Vordergrund, dass der Waggon beladen wird. Dies kann in die Regeln aufgenommen werden, um so das Verhalten zielgerichteter zu gestalten.

In den Regeln sind Variablen enthalten. Diese Variablen können belegt werden. Man bezeichnet die durch die Variablenbelegung entstehende Regel als Instanz der Regel. Das Belegen der Variablen passend zu den vorhandenen Fakten wird als Matching bezeichnet.

Die am Beispiel des Containerproblems getroffene Beobachtung gilt allgemein für vorwärts verkettende Regelsysteme. In einer speziellen Situation werden mehrere Regeln anwendbar

sein. Im Containerbeispiel gab es zunächst nur eine Regel. Diese steht aber aufgrund der enthaltenen Variablen für eine Vielzahl von Regeln.

In der Ausgangssituation sind gemäß der Regel neun verschiedene Aktionen möglich. Dies setzt sich fort. Man erhält einen großen Verzweigungsgrad. Insbesondere läuft man auch Gefahr, durch ständiges Bewegen eines Containers zwischen zwei Plätzen in einen unendlichen Zyklus zu geraten. Man findet hier ähnliche Probleme wie bei den in Kapitel 3 (Suche) behandelten Verfahren und kann somit die dort diskutierten Vorgehensweisen anwenden. In Beispiel 2.13 auf der vorherigen Seite ist dies bereits berücksichtigt, indem das zweimalige Versetzen eines Containers (in zwei aufeinander folgenden Aktionen) ausgeschlossen wird.

Regelauswahl

Da im Allgemeinen mehrere Regeln anwendbar sein werden, ist die Auswahl einer **geeigneten Regel** von entscheidender Bedeutung.

Die einfachste Strategie ist, die erste anwendbare Regel, die man findet, anzuwenden. Dies entspricht der PROLOG-Philosophie, die im Abschnitt 4.2.1 erläutert wird.

Beispielsweise kann es sinnvoll sein, die Anwendung von Regeln zu protokollieren und gegebenenfalls in Abhängigkeit davon die **wiederholte Anwendung** einer Regel zu **unterbinden**. Zur Vermeidung von Schleifen kann man verbieten, dass eine Regel mit ein und derselben Instantiierung mehrmals verwendet wird.

Auf weitere Kriterien für die Auswahl einer geeigneten Regel gehen wir in Abschnitt 2.4.4 ein.

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass in den Bedingungen einer Regel auch negative Bedingungen enthalten sein können, das heißt, dass eine Bedingung nicht erfüllt sein darf.

Liegt der Container A nicht an oberster Position, das heißt, auf ihm liegt ein weiterer Container, so wird nicht explizit gespeichert, dass er nicht oben liegt, da dies implizit aus der Tatsache, dass er einen weiteren Container trägt, folgt. Ob die Bedingung

```
nicht(oben(a))
```

erfüllt ist, wird nicht ohne weiteres zu beantworten sein, da nur Informationen über `oben` vorliegen. Man löst dies dadurch, dass

```
oben(a)
```

untersucht wird. Trifft dies zu, so ist die Bedingung `nicht(oben(a))` nicht erfüllt. Umgekehrt wird `nicht(oben(a))` als erfüllt betrachtet, wenn `oben(a)` nicht erfüllt ist. Diese Art der Negation heißt **Negation as failure** (vgl. Kapitel 4).

2.4.2 Rückwärtsverkettung

Rückwärtsverkettung geht zielorientiert vor. In Beispiel 2.11 auf Seite 66 wird man nicht die Vorwärtsverkettung verwenden, wenn man daran interessiert ist, zu untersuchen, ob eine GmbH gegründet werden kann. In diesem Fall ist das ziellose Vorgehen der Vorwärtsverkettung nicht sinnvoll.

Stattdessen sucht man nach einer Regel für *GmbH_gründen* und überprüft dann sukzessive die Bedingungen.

Das Vorgehen bei der rückwärts verkettenden Abarbeitung ist in Listing 2.3 dargestellt. Man beachte die indirekte Rekursion, die durch den gegenseitigen Aufruf der Funktionen entsteht.

Listing 2.3 Algorithmus Rückwärtsverkettung

```
FUNCTION RÜCKWÄRTSVERKETTUNG(Hypothese)
  IF Existiert eine Regel : WENN Bedingungen DANN Hypothese
    AND
    FORALL B aus Bedingungen : GÜLTIG(B)
  THEN RETURN true;
  ELSE RETURN false;
  ENDIF;
END

FUNCTION GÜLTIG(Hypothese)
  IF Hypothese in Faktenbasis
     OR
     RÜCKWÄRTSVERKETTUNG(Hypothese)
  THEN
     Füge Hypothese in Faktenbasis ein;
     RETURN true;
  ELSE RETURN false;
  ENDIF;
END
```

Auch für die Rückwärtsverkettung gelten die in Abschnitt 2.4.1 getroffenen Aussagen bezüglich der Regelanwendung. Im Allgemeinen werden mehrere Regeln anwendbar sein, so dass auch hier Strategien wie Prioritätensetzung oder Spezifität zur Auswahl einer geeigneten Regel erforderlich sind.

Beispiel 2.14 Rückwärtsverkettung

Seien folgende Regeln gegeben (vgl. Beispiel 2.12 auf Seite 69):

1. WENN ist_Elefant(X) DANN ist_Säugetier(X)
2. WENN ist_Katze(X) DANN ist_Säugetier(X)
3. WENN ist_Pinguin(X) DANN ist_Vogel(X)
4. WENN ist_Säugetier(X) DANN ist_Lebewesen(X)
5. WENN ist_Vogel(X) DANN ist_Lebewesen(X)
6. ist_Elefant(Clyde)
7. ist_Pinguin(Tweety)

Wir wollen überprüfen, ob Tweety ein Lebewesen ist. Das Vorgehen der Rückwärtsverkettung ist in Bild 2.6 auf der nächsten Seite dargestellt.

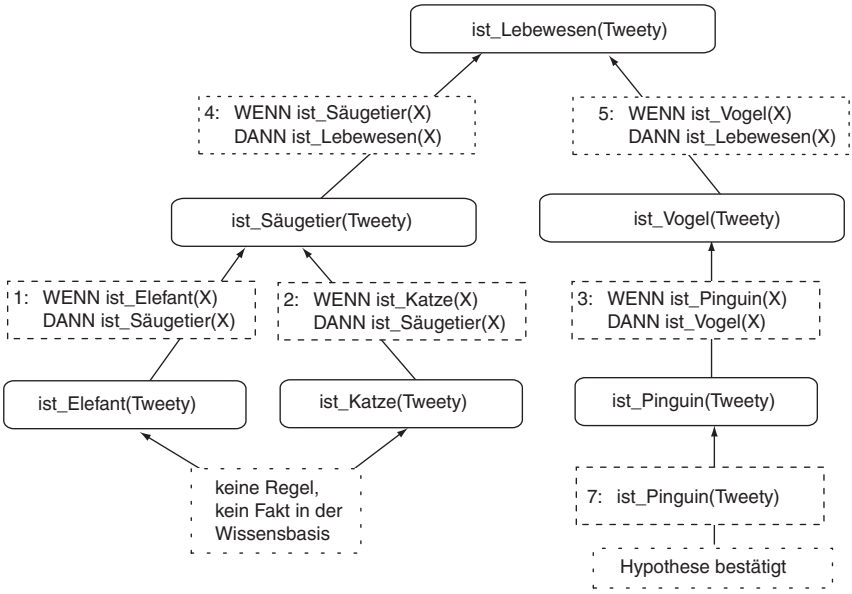


Bild 2.6 Rückwärtsverkettung

2.4.3 Regelverarbeitung und PROLOG

Die Programmiersprache PROLOG wird in Kapitel 4 eingeführt. Die Abarbeitung einer Anfrage erfolgt in PROLOG mittels Rückwärtsverkettung. Wir erläutern dies an folgendem Beispiel:

Beispiel 2.15 Rückwärtsverkettung und PROLOG

Wir betrachten Regeln mit den (bedeutungslosen) Prädikaten `p, q, r, s` und den Konstanten `a, b`.

```
1  p(X) :- q(X), r(X).
2  q(X) :- s(X).
3  s(a).
4  s(b).
5  r(b).
```

Es wird die Anfrage `?-p(X)` gestellt.

Die Abarbeitung dieser Anfrage ist in Bild 2.7 dargestellt.

Dies entspricht dem Vorgehen bei der Rückwärtsverkettung. PROLOG erlaubt Backtracking, das Suchen nach alternativen Lösungen. In PROLOG wird also eine **versuchsweise Strategie** verfolgt. Der Ablauf der Rückwärtsverkettung ist in Tabelle 2.14 dargestellt.

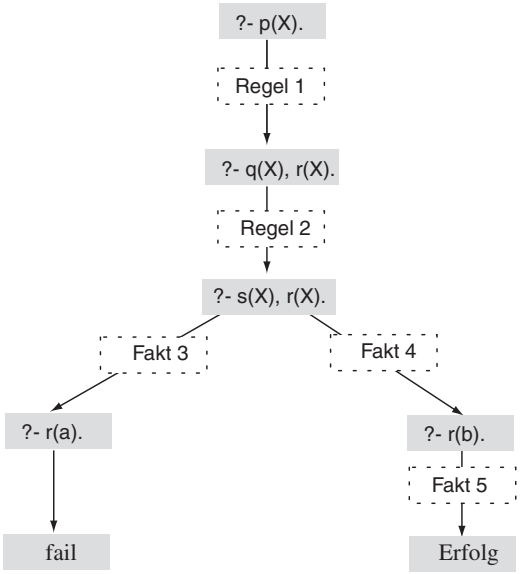


Bild 2.7 Rückwärtsverkettung in PROLOG

Tabelle 2.14 Rückwärtsverkettung in PROLOG

Schritt	Zu prüfende Hypothese	Ausgewählte Hypothese	Mögliche Regeln	Angewandte Regeln	Variablen-Zuweisung	Bemerkung
1	1 p(X)	1 p(X)	1	1	–	
2	1 q(X) 2 r(X)	1 q(x)	2	2	–	
3	1 s(X) 2 r(X)	1 s(X)	3, 4	3	X=a	
4	1 r(a)	1 r(a)	–	–		Fehlschlag, Backtracking
3	1 s(X) 2 r(X)	1 s(X)	3, 4	4	X=b	
4	1 r(b)	1 r(b)	5	5	–	Erfolg

Zusammenfassung

Es gibt zwei Arten von Regel-Systemen: vorwärts und rückwärts verkettende Systeme. **Vorwärtsverkettung** ist sinnvoll, wenn kein klar formuliertes Ziel im Sinne einer Anfrage vorliegt. Hat man beispielsweise ein System zur Verkehrsfluss-Steuerung, so ist zwar das Ziel – optimaler Verkehrsfluss – klar. Dies ist aber keine mögliche Anfrage an ein Regel-System. Vielmehr müsste man fragen, ob eine bestimmte Ampelphase verlängert werden soll. Hier ist es sinnvoller, vorwärts verkettend zu arbeiten, um so einen Aktionsvorschlag zu erhalten. Ist im Beispiel 2.11 auf Seite 66 unklar, welche Firmenform angestrebt wird, so ist Vorwärtsverkettung sinnvoll. Will man dagegen nur überprüfen, ob man eine GmbH gründen kann, ist das zielgerichtete Vorgehen der **Rückwärtsverkettung** adäquat. Die Auswahl von Regeln kann mittels

- unwiderruflicher Strategien oder
- versuchsweiser Strategien

erfolgen.

Die Darstellung von Wissen mittels WENN-DANN-Regeln hat eine Reihe von Vorteilen:

- Wissen kann modular aufgebaut werden.
- Regeln sind im Allgemeinen leicht verständlich.
- Regelsysteme sind damit durch einen leichten und verständlichen Aufbau gekennzeichnet.
- Damit ergibt sich auch eine gute Erklärbarkeit der gezogenen Schlüsse.
- Regeln sind gut geeignet für die Darstellung empirischen Wissens.

Als Nachteile sind zu nennen:

- Die Abarbeitung kann aufwendig sein, da stets alle Bedingungsliterale geprüft werden müssen. Einen Ausweg haben wir bereits skizziert. Man kann durch Prüfung der Veränderungen in der Faktenbasis die Regeln eingrenzen, deren Anwendbarkeit sich geändert haben kann.
- Die Auswahl einer anwendbaren Regel muss bei größeren Problemen geeignet gesteuert werden.

Im Gegensatz zur Wissensverarbeitung mit Logik kann in Regelsystemen die Abarbeitung stärker beeinflusst werden. Das Resolutionsverfahren wählt in einem gewissen Sinn beliebig die zu resolvierenden Klauseln aus. Bei Regelsystemen kann man beispielsweise durch die Reihenfolge der Regeln oder die Reihenfolge von Bedingungen in einer Regel eine Effizienzsteigerung der Verarbeitung bewirken.

Auf der WWW-Seite *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* finden Sie die vorgestellten sowie weitere Beispiele.

2.4.4 Business Rules

Die explizite Darstellung in Form von Regeln wird seit vielen Jahrzehnten in wissensbasierten Systemen eingesetzt. Durch die Enttäuschung über die nicht erfüllten Erwartungen der Expertensysteme in den 70er und 80er Jahren gerieten auch die Regelsysteme etwas in Verruf. Ungeachtet dieser Entwicklung werden regelbasierte Wissenskomponenten heute weltweit in der Diagnose oder auch der Produktionssteuerung eingesetzt.[2]

Einen massiven Aufschwung erlebten die regelbasierte Wissensverarbeitung durch die Neuentdeckung der Regeln unter dem Begriff *Business Rules* in den 80er und 90er Jahren. Bereits Ende der 80er Jahre wurde die so genannte *Business Rules Group*[3] gegründet. Ziel war der adäquate Einsatz von wissensbasierten Systemen in betriebswirtschaftlichen Anwendungen. Regelsysteme erlauben eine flexible und verständliche Darstellung von Geschäftsprozessen.

[2] Auf den Seiten der *S&D Software nach Maß GmbH* finden sich sowohl Verweise auf Business-Rules-Management-Systeme als auch Hinweise auf konkrete Anwendungen

[3] http://www.businessrulesgroup.org

Beispielsweise kann so eine kundenbezogene, konfigurierbare Preispolitik für die angebotenen Produkte und Dienstleistungen erfolgen. Die hohen Kosten für die Anpassung vorhandener betrieblicher Standardsoftware auf neue Tarifstrukturen können somit deutlich reduziert werden.

Durch den Einsatz von **Geschäftsregeln**, englisch **Business Rules**, wird es den Anwendern ermöglicht, das Wissen über Abläufe und Bedingungen im Unternehmen explizit darzustellen und dieses Wissen einer automatisierten Verarbeitung zugänglich zu machen.

Die Vorteile einer expliziten, deklarativen Wissensrepräsentation werden hier besonders deutlich: Neue Angebote oder neue Ideen für die Gestaltung von Kundenbeziehungen werden durch neue zusätzliche Regeln beschrieben, eine programmtechnische Änderung der Software erübrigt sich.

Diese Regeln werden als Geschäftsregeln bezeichnet. Geschäftsregeln genügen der üblichen Regelstruktur: Die Wenn-Dann-Aussagen besitzen einen Bedingungsteil sowie einen Aktions- oder Schlussfolgerungsteil. Das Beispiel 2.16 zeigt den Regelaufbau und illustriert das Einsatzgebiet. Für die Überprüfung des Bedingungsteils wird auf eine Faktenbasis oder eine Datenbank zugegriffen.

Beispiel 2.16 Preisgestaltung mittels Business Rules

```
WENN Kunde=Neukunde
    UND Warenkorb  20                 DANN Lieferkosten=5,95
WENN Warenkorb > 20
    UND Lieferkosten > 3,95           DANN Lieferkosten=3,95
WENN Warenkorb > 100                  DANN Kundenrabatt=+5%
WENN Tag.heute=Samstag ODER Tag.heute=Sonntag
    UND Warengruppe_in_Warenkorb=CD   DANN Rabatt=+5%
WENN 24h-Lieferung=true               DANN Zuschlag=+6,00
WENN Zahlungsart=Nachnahme            DANN Zuschlag=+2,50
WENN offeneRechnung_in_KundenDB>2     DANN
     Bestellung_nicht_möglich
```

Die Verarbeitung der Geschäftsregeln wird von einer so genannten *Rule Engine* übernommen. Diese ist Teil einer Software für das Management von Geschäftsregeln: **Business Rules Management System** (BRMS).

Auf den ersten Blick sehen die Aufgaben des BRMS relativ simpel aus. In Abbildung 2.5 auf Seite 68 wurde bereits der prinzipielle Ablauf eines Regelsystems mit Vorwärtsverkettung – und um ein solches handelt es sich normalerweise bei Business Rule Systems – dargestellt. Das BRMS hat also nur einfache Steuerungs- und Kontrollaufgaben? Weit gefehlt. Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel 2.17 Geschäftsregeln

Wir wollen einen Verkaufsprozess mit folgenden Regeln steuern:

```
(1) WENN X ist Kunde                          DANN sende Rechnung.
(2) WENN nicht X ist Kunde                    DANN Nachnahme
(3) WENN X ist guter Kunde                    DANN Rabatt 10%
(4) WENN jährlicher Umsatz von X > 1.000      DANN X ist guter Kunde
(5) WENN X ist guter Kunde UND Aktion         DANN Rabatt 15%
(6) WENN X ist Chef                           DANN Rabatt 20%
```

Im Normalfall sind mehrere Regeln anwendbar. Die Menge der anwendbaren Regeln wird *Konfliktmenge* genannt. Auf Seite 71 hatten wir dieses Problem bereits angerissen und

- das simple Auswählen der **nächsten anwendbaren Regel** und
- das **Verhindern der wiederholten Anwendung** einer Regel skizziert.
  Wir hatten diskutiert, dass man die Anwendung der Regeln protokollieren sollte, um die wiederholte Anwendung einer Regel zu unterbinden, um eventuelle Schleifen zu verhindern.

Weitere mögliche Strategien für die Auswahl einer Regel sind:

- **Spezifität**: Welche Regel soll das BRMS auswählen, wenn beispielsweise unser Chef etwas bestellt, der gleichzeitig ein guter Kunde ist?
  Nach der Spezifität sollte die 20%-Chef-Regel (6) angewendet werden, da diese spezifischer als die `guter-Kunde`-Regel (3) ist.
- **Aktualität**: Man kann die Aktualität der Fakten der Faktenbasis in die Auswahl der Regeln einbeziehen. Neuere Fakten sollten bevorzugt werden, da sie offensichtlich aktuelle Informationen enthalten.
  Bevorzugt man Regeln, die ältere Fakten benutzen, erzielt man damit ähnliche Effekte wie die Breitensuche (vgl. Kapitel 3). Wendet man Regeln an, die jüngere Fakten benutzen, erhält man ein zur Tiefensuche analoges Verhalten.
- **Anzahl der Vorbedingungen**: Je mehr Vorbedingungen, desto spezifischer scheint sie zu sein. Dies ist also eine Art Spezifität.
- **Priorität**: Wir vergeben Regeln eine Priorität. Die Vergabe von Prioritäten sollte man immer dann vornehmen, wenn es um sicherheitskritische Dinge geht. Eine Regel zur Autosteuerung, die einen Bremsvorgang auslöst, sollte Vorrang vor der Regel haben, die das Einschalten des Scheibenwischers veranlasst.
- Man kann **Logik-Regeln** bevorzugen, das heißt, dass die Logik-Regeln gegenüber den Aktionsregeln bevorzugt werden.
  Dies ist sinnvoll, denn wenn man beispielsweise weiß, dass der Kunde X einen Umsatz über 1.000 hat, so sollten wir zuerst Regel (4) anwenden. Denn erst nach Aufnahme der Information, dass X ein guter Kunde ist, wird Regel (3) anwendbar. Sonst wäre die normale Reaktion das Rausschicken einer Rechnung (Regel 1).

Regelsysteme enthalten im Allgemeinen sehr viele Regeln. Dies kann zu Effizienzproblemen führen, so dass grundsätzliche Überlegungen zur Steuerung erforderlich sind. Beispielswei-

se kann man die Beobachtung, dass sich in jedem Zyklus in der Faktenbasis nur wenig ändert, nutzen. Durch das Protokollieren dieser Veränderungen wird eine Effizienzsteigerung erreicht. Wird durch Anwendung einer Regel ein neuer Fakt für eine Eigenschaft p hinzugefügt, müssen im nächsten Zyklus nur diejenigen Regeln untersucht werden, die p als Vorbedingung enthalten. An der Anwendbarkeit der anderen Regeln ändert sich nichts.

Im Gegensatz zum herkömmlichen Programm-Code erheben Geschäftsregeln den Anspruch, auch für Nichtinformatiker verständlich zu sein. Selbst bei nicht grafischen Darstellungen kann eine Regel durchaus lesbar und verständlich sein, vergleiche Beispiel 2.18[4].

Beispiel 2.18 Business Rules in JBOSS

```
rule "Viele rabattierbare Produkte"
    when
        kassenzettelObjekt: Kassenzettel( produkteRabattierbarAnteil > 0.5 )
            && Kassenzettel( rabatt == 0.00 )
    then
       kassenzettelObjekt.setRabatt(kassenzettelObjekt.getGesamtPreis() * 0.3);
end
```

Eine grafische Darstellung, wie sie in einer Reihe von Business Rule Plattformen verwendet wird, ist insbesondere für die Erarbeitung einer Wissensbasis ein hilfreiches Werkzeug.

Bild 2.8 zeigt die grafische Oberfläche des IBM Decision Composers[5].

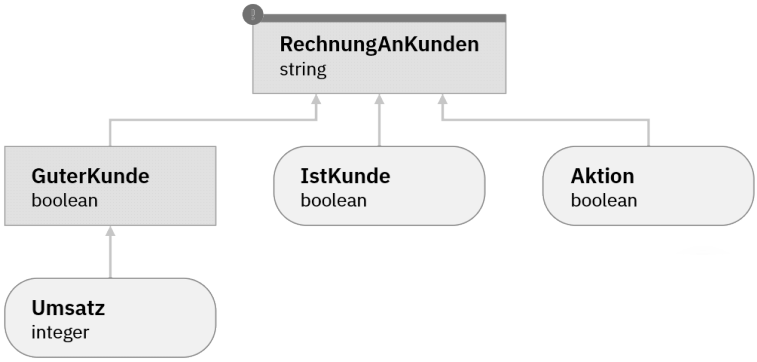


Bild 2.8 Grafische Oberfläche des IBM Decision Composers[5]

Hinweise für die Entwicklung und den Einsatz von Geschäftsregeln gibt die Business Rules Group. In einem Manifest, dem Business Rules Manifesto [Bus03], werden Grundsätze für die Entwicklung und den Einsatz von Geschäftsregeln dargelegt.

4 *http://www.jboss.org/*
5 *https://decision-composer.ibm.com*

Business Rules haben auch Einzug in die Geschäftsprozessmodellierung gefunden. Ergänzend zum Modellierungsstandard BPMN (Business Process Model and Notation)[6] wird nun die Diagrammform DMN (Decision Model and Notation)[7] eingesetzt. DMN konzentriert sich auf die Modellierung von Geschäftsentscheidungen und Business Rules. BPMN und DMN können separat genutzt werden, sind aber kompatibel. Es gibt eine Reihe von Tools, die sowohl BPMN als auch DMN unterstützen, beispielsweise Camunda[8]. Eine gute Einführung in BPMN und DMN findet man in [FR19].

Die Basis von DMN sind Entscheidungstabellen, die eine ganze Reihe von Ausdrücken wie Vergleiche und logische Verknüpfungen erlauben.

Kunde	guter Kunde	Umsatz	Aktion	Chef	Betrag
true					Rechnung
false					Nachnahme
true	true				Rabatt 10%
true	true		true		Rabatt 15%
true		> 10.000			Rabatt 15%
true				true	Rabatt 20%

Ebenso sind in DMN Strategien zur Auswahl einer geeigneten Regel (sprich Entscheidungstabellenzeile) eingebaut. Auch wenn die Ausdrucksfähigkeit noch nicht den kompletten Umfang der Business Rules erlangt hat, so ist die Modellierung von Geschäftsprozessen durch den Einsatz der Business Rules deutlich leistungsstärker geworden.

Einen Überblick über aktuelle BRMS kann man sich im WWW verschaffen: *https://www.trustradius.com/business-rules-management-brms*.

Übung 2.20 Vorwärts- und Rückwärtsverkettung

Worin unterscheiden sich Vorwärts- und Rückwärtsverkettung?

Übung 2.21 PROLOG als Regelsystem

Wie erfolgt die Abarbeitung in PROLOG (Kapitel 4), wenn man PROLOG als regelverarbeitendes System auffasst?

Übung 2.22 Suche und Regelverarbeitung

Wo sehen Sie Bezüge zwischen der in Kapitel 3 behandelten Suche und der Regelverarbeitung?

Übung 2.23 Regeln

Komplettieren Sie das Beispiel für die Firmengründung. Entwickeln Sie Regeln für andere Firmenformen.

[6] *http://www.bpmn.org/*
[7] *https://www.omg.org/dmn/*
[8] *https://camunda.com/*

Übung 2.24 Wasser-Problem

Lösen Sie das Wasserproblem (Beispiel 3.2 auf Seite 113) mit Hilfe eines regelbasierten Systems. Untersuchen Sie, wie sich Vorwärts- und Rückwärtsverkettung verhalten.

Übung 2.25 Käfig-Problem

Lösen die das Käfig-Problem (Aufgabe 3.11 auf Seite 144) mit Hilfe eines regelbasierten Systems. Untersuchen Sie, wie sich Vorwärts- und Rückwärtsverkettung verhalten.

Übung 2.26 Farmer-Problem

Ein Farmer möchte einen Kohlkopf, einen Wolf und eine Ziege mit einem Boot über einen Fluss bringen (vgl. Kapitel 3). Allerdings ist das Boot so klein, dass er jeweils nur den Kohlkopf oder ein Tier mitnehmen kann. Die Ziege mit dem Kohlkopf unbeaufsichtigt zu lassen, ist ebenso unzweckmäßig, wie den Wolf mit der Ziege allein zu lassen. Wie bekommt er doch alle drei über den Fluss? Lösen Sie das Problem mit einem Regelsystem.

Übung 2.27 Brückenquerung

Vier Personen wollen nachts eine Hängebrücke benutzen. Aus Sicherheitsgründen benötigen die Vier dabei eine Taschenlampe. Die Batterie der Lampe reicht genau für 60 Minuten. Außerdem dürfen höchstens zwei Personen gleichzeitig auf der Hängebrücke sein. Die Lampe kann nicht zurück geworfen werden, sie muss übergeben werden. Die Personen sind unterschiedlich schnell. Anna benötigt nur fünf Minuten, um die Brücke zu überqueren, Boris 10, Clara 20, Dirk 25. Lösen Sie das Problem mit einem Regel-System.

Übung 2.28 PROLOG und Regelverarbeitung

Beschreiben Sie PROLOG im Kontext der Regel-Verarbeitung. Erläutern Sie die Form der Abarbeitung, die in PROLOG erfolgt.

Übung 2.29 Expertensysteme und Regeln

Erläutern Sie, wie überprüft wird, ob eine Regel anwendbar ist. Wie wird mit in den Bedingungen enthaltenen Variablen umgegangen. Welche Techniken der Regelauswahl bieten regelbasierte Expertensysteme an?

2.5 Semantische Netze und Frames

Semantische Netze und Frames zählen zu den klassischen Wissensrepräsentationsformen. Im Unterschied zu Regeln, die Zusammenhänge, logische Abhängigkeiten, bedingte Aktionen darstellen, stehen bei den semantischen Netzen und den Frames Objekte im Vordergrund. Frames und semantische Netze unterstützen die Darstellung von Objekten mit ihren Eigenschaften und von Beziehungen zwischen Objekten und Klassen von Objekten.

2.5.1 Semantische Netze

Zur Veranschaulichung der Konzepte, die den semantischen Netzen zugrunde liegen, betrachten wir einen Ausschnitt eines semantischen Netzes zur Darstellung von Unternehmensformen (Bild 2.9).

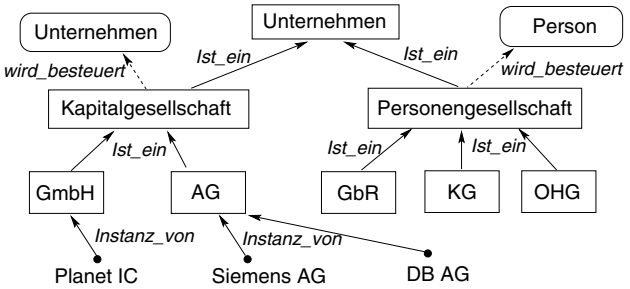


Bild 2.9 Rechtsformen von Unternehmen

Begriffe wie Unternehmen, AG oder OHG bezeichnen keine Objekte. Sie sind Oberbegriffe, bezeichnen also **Klassen**. Die Siemens AG dagegen ist keine Klasse, sondern eine existierende Firma, ein **Objekt**.

Zwischen diesen Klassen und Objekten lassen sich in semantischen Netzen Beziehungen definieren. Die Kapitalgesellschaft ist eine spezielle Form eines Unternehmens, die GmbH ist eine Form einer Kapitalgesellschaft. Man bezeichnet diese Form der Beziehung als eine **ist-ein-Relation**. Diese Beziehungen können unterschiedlich interpretiert werden. Im Sinne der Logik kann die Beziehung zwischen der Klasse *Kapitalgesellschaft* und der Klasse *Unternehmen* aufgefasst werden als:

Jedes Objekt, welches eine Kapitalgesellschaft ist, ist ein Unternehmen.

Man kann diesen Zusammenhang auch als Teilmengenbeziehung auffassen:

Die Menge der Kapitalgesellschaften ist eine Teilmenge der Menge aller Unternehmen.

Die Klasse *Unternehmen* wird somit auch als **Oberklasse** von *Kapitalgesellschaft* bezeichnet, *Kapitalgesellschaft* entsprechend als **Unterklasse**. Ein Objekt stellt eine Instanz einer Klasse dar. Diese Beziehung wird als **Instanz-von-Relation** bezeichnet.

Den Klassen und Objekten können **Eigenschaften** zugeordnet werden. Eine *Kapitalgesellschaft* wird als *Unternehmen* besteuert. Bei den *Personengesellschaften* werden die *Personen* besteuert.

In der grafischen Darstellung eines semantischen Netzes sind enthalten:

- Knoten
- Kanten

Die Knoten sind *Klassen, Objekte* oder *Werte*. Die Kanten können *Beziehungen* zwischen Klassen oder Objekten, aber auch *Eigenschaften* von Objekten oder Klassen darstellen.

Semantische Netze wurden entwickelt, um eine dem menschlichen Gedächtnis adäquate Form zur Verfügung zu haben. Sie wurden zunächst für die Analyse von Wörtern in Sätzen benutzt [Qui68]. Seitdem haben die semantischen Netze als Konzept zur Wissensrepräsentation Eingang in viele Anwendungen gefunden.

Im Beispiel über mögliche Rechtsformen eines Unternehmens müssen wir nicht explizit darstellen, dass die Siemens AG ein Unternehmen ist. Diese Eigenschaft ist gegeben, da die Beziehungen *ist-ein* und *Instanz-von* in semantischen Netzen als transitiv betrachtet werden.

Gilt A ist-ein B und B ist-ein C, so gilt auch A ist-ein C.

Des Weiteren muss ebenfalls nicht explizit angegeben werden, dass die Siemens AG als Unternehmen besteuert wird. Eigenschaften werden auf Unterklassen oder Objekte vererbt.

Obwohl sich die semantischen Netze für etliche Anwendungen eignen, haben sie ihre Grenzen. Insbesondere sind bestimmte Ausdrucksformen, wie sie beispielsweise aus der Prädikatenlogik bekannt sind, in semantischen Netzen nicht verfügbar. Existenzaussagen oder Oder-Aussagen können beispielsweise nicht formuliert werden.

Eine Eigenschaft der semantischen Netze ist, dass im Prinzip nur zweistellige Beziehungen dargestellt werden können. Es lassen sich aber auch komplexere Zusammenhänge darstellen. Dazu wird der Vorgang der Übergabe eines Buches von einer Person an eine weitere Person betrachtet. Er ist charakterisiert durch eine handelnde Person (*Agent*), einen *Empfänger* sowie ein *Objekt*, welches übergeben wird. Um zu charakterisieren, dass es sich um eine Übergabe handelt, wird eine Klasse *Geben* eingeführt. Jede Übergabe, jedes „Geben“ ist eine Instanz dieser Klasse. Die Klasse *Geben* ist selbst wieder Unterklasse der Klasse *Aktion*. Nun kann man ein Objekt *Ereignis17* als eine Instanz von Geben einführen (Bild 2.10).

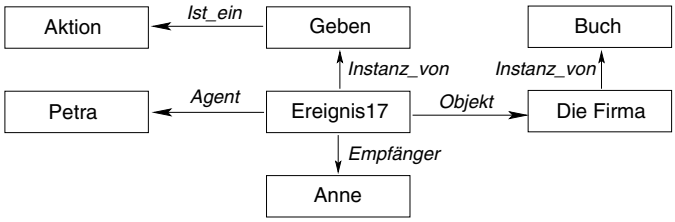


Bild 2.10 Semantisches Netz für eine Aktion

Kanten in semantischen Netzen stellen Beziehungen zwischen Klassen oder Objekten her. Beziehungen sind:

Unterklasse Eine Klasse ist ein Unterklasse einer anderen Klasse.

Instanz Ein Objekt ist eine Instanz einer Klasse.

Unterobjekt Ein Objekt ist Unterobjekt eines Objektes.

Eigenschaften von Objekten.

2.5.2 Frames

Das Konzept der Frames [Min75] hat seine Wurzeln in der Psychologie. Frames bauen auf der Beobachtung auf, dass der Mensch Objekte einer Klasse durch bestimmte Eigenschaften beschreibt und diese in uniformen Schemata speichert.

Dieses Vorgehen wurde aufgegriffen. Ein Objekt wird durch wesentliche Charakteristika beschrieben. Diese Eigenschaften werden in einem Objekt (Frame) zusammengefasst. Frames kann man von der Grundstruktur her mit einer Klasse in der objektorientierten Programmierung vergleichen. Ein Auto lässt sich durch die Angabe von bestimmten Charakteristika beschreiben:

```
Frame HWI-JD85
      Instanz-von        Auto
      Hersteller         Opel
      Typ                Corsa
      Motor              Viertakt
      Farbe              weinrot
      Karosserie         Metall
```

HWI-JD85 ist ein Objekt, es gehört zur Klasse Auto. Hersteller, Typ bezeichnen Eigenschaften. Die zugehörigen Werte sind Opel, Corsa.

Frames sind im Allgemeinen nicht so einfach wie das angegebene Beispiel. Sie nutzen analog zu den semantischen Netzen das Konzept der Hierarchie und Vererbung und können auch generische Informationen wie Standard-Werte oder Wertebeschränkungen enthalten:

```
Frame Auto
      Ist-ein            Fahrzeug
      Räder              default=4
      Motor              Wertebereich=(Viertakt, Zweitakt, Diesel)
      Karosserie         Wertebereich=(Metall, Kunststoff)
```

Für das Objekt HWI-JD85 muss nicht mehr angegeben werden, dass es vier Räder hat, da diese Eigenschaft von der Klasse Auto geerbt wird.

Man bezeichnet die „Wertezellen“ eines Frames als **Slots**. Die Slots

- sind benannt (Räder, Motor etc.).

Sie können gefüllt sein mit:

- Werten (weinrot),
- Restriktionen (Wertebereich= ...),
- Default-Werten (Standard-Wert, der genommen wird, falls kein Wert angegeben ist).

Es gibt etliche Frame-Implementierungen mit unterschiedlichen Eigenschaften. Einige Systeme erlauben, dass man den Objekten Prozeduren zuordnet, die beim Zugriff auf diese Objekte aktiviert werden. Man unterscheidet zwischen Prozeduren, die aktiviert werden, wenn das Objekt angelegt, gelesen oder gelöscht wird.

WIN-PROLOG der Firma LPA (*www.lpa.co.uk*) enthält eine solche Frame-Komponente. Ein Ausschnitt des Auto-Frames wird in Listing 2.4 auf der nächsten Seite gegeben.

Das Framekonzept ist Bestandteil des Expert Systems Toolkit **flex**, welches unter *www.lpa.co.uk/flx.htm* und *www.lpa.co.uk/ftp/6100/flx_tut.pdf* ausführlich beschrieben ist.

Listing 2.4 Frame Auto in LPA-PROLOG

```
frame Auto is a Fahrzeug ;
   default raeder are 4
instance `HWI-JD85' is a kind of Auto ;
   hersteller is opel
   and typ is corsa
   and motor is viertakt
   and karosserie is metall
   and farbe is weinrot .
constraint motoren
   when the motor of an Auto changes to X
   then check that X is { zweitakt or viertakt or diesel }
   otherwise write(`Der Motor des Autos wurde nicht geaendert')
   and nl.
constraint karosserien
   when the karosserie of an Auto changes to X
   then check that X is { metall or kunststoff }
   otherwise write(`Karosserie des Autos wurde nicht geaendert' )
   and nl.
```

In Listing 2.4 sind zwei Restriktionen angegeben, die den Wertebereich der Slots `motor` und `karosserie` einschränken und Änderungen auch kontrollieren.

Man kann nach der Anzahl der Räder von HWI-JD 85 fragen und erhält den von der Klasse Auto geerbten Wert 4.

```
?- lookup(raeder,`HWI-JD85`, M).
     M=4
```

Frames und semantische Netze können in andere Wissensrepräsentationen eingebunden werden. Beispielsweise kann auf die Frames aus Listing 2.4 in PROLOG-Regeln zurückgegriffen werden.

Frames und **semantische Netze** haben den Vorteil, dass ihre Struktur einfach und die zugrunde liegenden Konzepte leicht verständlich sind. Semantische Netze eignen sich zur *Darstellung von Klassen* und deren *Beziehungen*. Es können *Hierarchien* dargestellt werden, in denen Eigenschaften vererbt werden.

Hierarchien werden auch in Frames dargestellt. Frames sind eine Form der Wissensrepräsentation, die Wissen in festen Schemata ablegt. Eigenschaften eines Objektes oder einer Klasse werden zusammengefasst. Die der objektorientierten Programmierung zugrunde liegenden Konzepte findet man in Frames und den semantischen Netzen. Korrekterweise muss man diese Aussage umdrehen: Die Konzepte der semantischen Netze und der Frames haben auf die Programmiersprachen ausgestrahlt und die Entwicklung der objektorientierten Programmierung beeinflusst.

Weitere Beispiele sind unter *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* zu finden.

2.5.3 Wissensnetze

Im betrieblichen Umfeld besteht die Aufgabe, das Firmenwissen, welches sich aus dem Wissen der Mitarbeiter sowie dem Wissen aus den vielen Dokumenten zusammensetzt, allen Mitarbeitern jederzeit – wenn benötigt – zur Verfügung zu stellen. *„Wenn Siemens wüsste, was Siemens weiß“*, ist zu einem geflügelten Wort für die Notwendigkeit eines umfassenden **Wissensmanagements** im Unternehmen geworden. Hierbei wird Management von Wissen nicht immer im Sinne der künstlichen Intelligenz gesehen. Techniken der Wissensdarstellung aus der künstlichen Intelligenz können jedoch viel zur Lösung des Problems beitragen. Unter dem Begriff des **Wissensnetzes** wird eine Wissensrepräsentation verstanden, die auf das Konzept der semantischen Netze zurückgreift. Eine objektorientierte oder Frame-Darstellung des Wissens wird integriert, und die anschauliche grafische Darstellung erfolgt mittels **Topic Maps**, auch **Wissenslandkarte** genannt.

In einer Wissenslandkarte repräsentiert die Entfernung zweier Begriffe oder Wissensinhalte deren inhaltliche Nähe zueinander. Ein Wissensnetz ist somit ein Informationssystem, in dem zusätzlich die semantischen Beziehungen der Begriffe untereinander verwaltet werden. Diese Meta-Ebene ermöglicht eine **semantische Suche** – eine Suche, die über das Auffinden reiner Zeichenketten weit hinausgeht.

Bei einer Suche nach einem bestimmten Begriff wird im Ergebnis ein Ausschnitt des gesamten Wissensnetzes grafisch dargestellt (Bild 2.11). Die unterschiedlichen Füllstände der Knoten geben darüber Auskunft, ob noch weitere Verbindungen existieren: Für das Fach „Einführung in die Programmierung“ werden alle Beziehungen angezeigt, wogegen fast alle Verbindungen des Knotens „Lehrveranstaltungen“ verborgen sind.

Im Sinne der Objektorientierung stellt jeder Knoten im Netz entweder eine *Klasse*, zum Beispiel „Lehrveranstaltungen“ oder eine *Instanz*, zum Beispiel „Künstliche Intelligenz“ dar.

Um die Probleme zu umgehen, die mit einer Mehrfachvererbung einhergehen, werden andere Konzepte, wie zum Beispiel das der „Rolle“, eingeführt. Klassen werden erweitert, so dass den Instanzen dann unterschiedliche „Rollen“ zugewiesen werden können: Einige bestimmte Instanzen der Klasse Person füllen die Rolle „Professor“ aus.

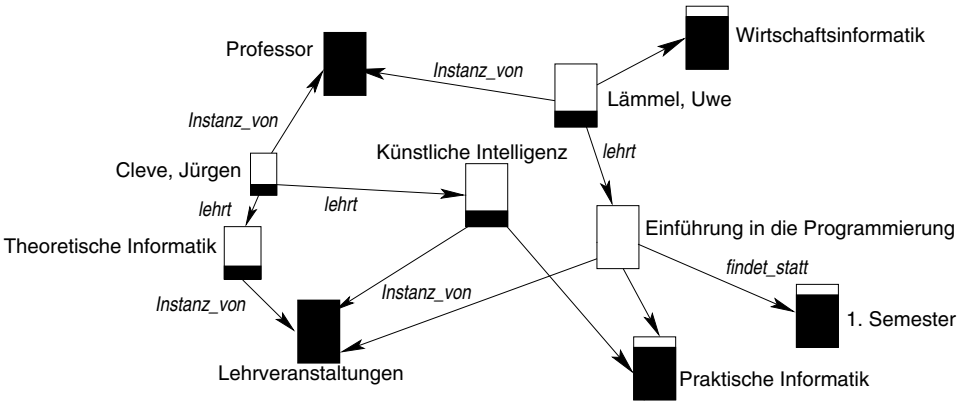


Bild 2.11 Wissensnetz zum Wirtschaftsinformatik-Studium, dargestellt als Topic Map, eigene Darstellung in Anlehnung an K-Infinity der Firma intelligent-views

Wissensnetze bieten ein großes Potenzial für ein effektives Wissensmanagement. Der Erfolg dieser Technik hängt wesentlich davon ab, ob das gespeicherte Wissen stets umfassend und aktuell ist. Ein Wissensnetz kann auch mit Hilfe eines *semantischen Wiki-Systems* implementiert werden. Das Augenmerk liegt hierbei auf dem Wort „semantisch“, da nur in derartigen Wikis auch Beziehungen definiert werden können. Das Semantic MediaWiki [9] bietet die Möglichkeit, sogenannte Attribute zu deklarieren. Damit können dann einerseits Beziehungen realisiert und andererseits den Instanzen auch Werte (zum Beispiel Zahlen) zugeordnet werden. Abbildung 2.12 zeigt die Seite „Jürgen Cleve“ als Instanz des Begriffs (Topic, Kategorie) „Hochschullehrer“. Auf der Seite wird die Beziehung „lehrt“ zur Lehrveranstaltung „Künstliche Intelligenz“ festgelegt.

Bild 2.12 Seite im semantischen Wiki-System

Übung 2.30 Datenstrukturen für semantische Netze

Semantische Netze wurden mittels einer grafischen Darstellung eingeführt. Entwickeln Sie Datenstrukturen, die eine Darstellung eines semantischen Netzes erlauben. Konzipieren Sie ein Programm, welches Wissen – dargestellt in semantischen Netzen – verarbeitet.

Übung 2.31 Unternehmensformen

Erweitern Sie das semantische Netz über die Rechtsformen eines deutschen Unternehmens hinsichtlich der Haftung.

[9] *https://www.semantic-mediawiki.org/wiki/Semantic_MediaWiki/de*

Übung 2.32 Recherche in semantischen Netzen

Entwickeln Sie einen Algorithmus, mit dessen Hilfe nach einer Eigenschaft eines Objektes oder einer Klasse gesucht wird.

Übung 2.33 Semantische Netze und Frames

Stellen Sie Probleme vor, die mit semantischen Netzen und Frames gelöst worden sind.

Übung 2.34 Vererbung

Untersuchen Sie das Problem der Mehrfachvererbung: Welchen Wert erbt eine Klasse, wenn sie Unterklasse von zwei Klassen ist. Stellen Sie Lösungen für dieses Problem vor.

2.6 Vages Wissen

Der Mensch benutzt häufig vage Aussagen wie:

- Der Mann ist groß.
- Das Auto ist teuer.
- Die Studenten lernen effizient.
- Morgen wird es regnen.

Im Gegensatz zur klassischen zweiwertigen Logik – jede Aussage ist entweder wahr oder falsch – hat man es hier mit Aussagen zu tun, deren Wahrheitswert nicht klar zu bestimmen ist oder deren Wahrheitswert noch nicht bekannt ist.

Ein gutes Beispiel für solche Aussagen findet man in unseren Sinneswahrnehmungen. Begriffe wie *salzig, kalt* und *scharf* für unsere geschmacklichen Empfindungen zeigen, dass wir Wahrnehmungen nicht quantitativ messen, sondern sofort abstrahieren und eine qualitative Einordnung vornehmen. Wir messen also nicht den Salzgehalt einer Speise. Stattdessen unterteilen wir in *salzig, versalzen* oder *fade*.

Dies ist Grundlage dafür, dass wir in bestimmten Situationen sehr schnell reagieren können. Die Regel

Wenn das Essen zu heiß ist, dann warte.

kann durch uns schnell verarbeitet werden, da wir eine Kategorie für *heiß* zur Verfügung haben.

Man bezeichnet diese Form von Aussagen als **unscharf**, da die Einschätzung, ob etwas heiß ist, ob das uns entgegenkommende Auto sehr nah ist, von Situation zu Situation variieren kann. Einige Studenten (hoffentlich viele) empfinden dieses Buch als gut lesbar, andere möglicherweise nicht.

Dagegen bezeichnet man Aussagen wie

- Mindestens 50 % der Studenten bestehen die Klausur mit einer guten Note.
- Der Kurs der Aktie steigt morgen auf über 20 Euro.

als **unsichere** Aussagen. Diese Aussagen sind zwar objektiv überprüfbar, aber nicht zum jetzigen Zeitpunkt. Es handelt sich bei beiden Aussagen um Vorhersagen, so dass erst zu einem späteren Zeitpunkt festgestellt werden kann, ob sie wahr oder falsch sind. Wollen wir entscheiden, ob wir eine bestimmte Aktie kaufen oder nicht, müssen wir solche, mit Unsicherheiten behaftete Aussagen benutzen, da wir den zukünftigen Kursverlauf der Aktie nicht kennen.

In den folgenden Abschnitten wird auf Methoden der Verarbeitung von vagem Wissen eingegangen werden. Dazu werden Methoden vorgestellt, die

- vage Aussagen mathematisch darstellen sowie
- Schlussfolgerungen über vage Aussagen ziehen können.

Diese Techniken werden eingesetzt, um Entscheidungsprozesse **symbolisch** zu modellieren.

Vage Aussagen werden unterteilt in:

- *unsicher*
- *unscharf*

2.6.1 Unsicheres Wissen

Es werden unsichere Aussagen wie

- Es regnet morgen.
- Der Kurs des Euro wird steigen.

betrachtet. Diese Aussagen sind mit einer Unsicherheit behaftet. Es ist klar, dass sie wahr oder falsch sind. Allerdings ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht klar, ob wahr zutreffen wird.

Die klassische zweiwertige Logik kann hier nicht angewandt werden. Stattdessen muss die klassische Logik erweitert werden.

Dazu löst man sich von den Wahrheitswerten W (1) und F (0) und lässt Werte auch zwischen 0 und 1 zu. Der klassische Ansatz ist das Verwenden von **Wahrscheinlichkeiten**. Eine Wahrscheinlichkeit drückt aus, mit welchem Maß man davon ausgehen kann, dass ein Ereignis eintritt. Das Ereignis

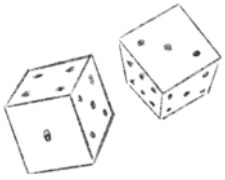
Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt.

hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,5.

Wir gehen im Folgenden nur auf wesentliche Aussagen und Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Für eine ausführliche Darstellung sei auf [EV18] verwiesen.

Wahrscheinlichkeiten lassen sich unterschiedlich interpretieren:

1. Sie können ein Maß für eine **Häufigkeit von Ereignissen** sein.
   Beim Würfeln steht das Ereignis „Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt.“ dafür, dass eine 1, 3 oder 5 gewürfelt wird. Da alle Elementarereignisse beim Würfeln gleich wahrscheinlich sind, kann bei diesem Ereignis die Wahrscheinlichkeit mit 0,5 berechnet werden.

   Die Wahrscheinlichkeit der Aussage „Die Siemens-Aktie steigt morgen um 5 %.“ kann nicht wie beim Würfeln analytisch bestimmt werden, sondern nur empirisch. Man untersucht

einen zurückliegenden Zeitraum und vergleicht positive Beispiele – an wie vielen Tagen ist der Kurs um 5% gestiegen – mit dem gesamten Ereignisraum, also der Anzahl aller betrachteten Tage.

2. Man kann Wahrscheinlichkeiten aber auch als **subjektive Maßzahlen** für das Eintreffen von Ereignissen verwenden. Ausgehend von Erfahrungen schätzt man, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintrifft.

Zunächst wird der Begriff einer **Wahrscheinlichkeit** genauer betrachtet. Sei mit Ω der Ereignisraum bezeichnet. Wenn man würfelt, können nur sechs Ereignisse eintreten. Der Ereignisraum ist gegeben durch

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Dies sind die so genannten **elementaren Ereignisse**. Jede **Aussage**, die man über das Würfeln trifft, lässt sich darstellen als:

$A \subseteq \Omega$

Die Aussage: „Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt." wird repräsentiert durch:

$A = \{1,3,5\}$

Eine Aussage A heißt **wahr**, wenn das tatsächlich eingetretene Ereignis in A enthalten ist.

Die Menge aller möglichen Aussagen ist gegeben durch die Menge aller Teilmengen von Ω: 2^{Ω}. Ω stellt das **sichere Ereignis** dar, da alle Elementarereignisse in Ω enthalten sind, folglich für eine beliebiges eingetroffenes Ereignis die Zugehörigkeit zu Ω erfüllt ist. $\emptyset$ ist das **unmögliche Ereignis**, da die leere Menge kein Elementarereignis enthält.

Ereignisse kann man nun verknüpfen. Sind X und Y Ereignisse über dem Ereignisraum Ω, so sind auch $X \cup Y$ und $X \cap Y$ wieder Ereignisse über Ω. Auch die Komplementbildung X^C ist wieder ein Ereignis.

Das Ereignis $X \cap Y$ tritt genau dann ein, wenn sowohl X als auch Y eintritt. Dies entspricht somit der Aussage $X \wedge Y$. Analog entspricht das Ereignis $X \cup Y$ der Aussage $X \vee Y$. Die Komplementbildung X^C entspricht der Negation.

Diesen Ereignissen möchten wir Zahlen zuweisen, die einen „Erwartungswert" für deren Eintreffen darstellen, eine Wahrscheinlichkeit. Dazu wählt man den Zahlenbereich der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Definition 2.18 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Sei Ω ein endlicher Ereignisraum. Eine Funktion $P : 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$P(\Omega) = 1$
$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$ für $X, Y \subseteq \Omega$, wobei $X \cap Y = \emptyset$

Eine solche Wahrscheinlichkeitsfunktion erfüllt eine Reihe von Eigenschaften. Für beliebige $X, Y \subseteq \Omega$ gilt:

unmögliches Ereignis	$P(\emptyset) = 0$
Monotonie	$X \subseteq Y \rightarrow P(X) \leq P(Y)$
Subtraktivität	$X \subseteq Y \rightarrow P(Y \cap X^C) = P(Y) - P(X)$
Subadditivität	$P(X \cup Y) \leq P(X) + P(Y)$
Additivität	$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$
Komplement	$P(X^C) = 1 - P(X)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Im Allgemeinen hat man nicht nur Aussagen wie „Morgen steigt der DAX um 5 %.“, sondern Aussagen der Form:

Wenn die Telekom eine positive Bilanz meldet, dann steigt die Telekom-Aktie um 5 %.

Diese Aussage muss mit einer Wahrscheinlichkeit versehen werden, da nicht sicher ist, dass die Aktie wirklich um 5 % steigt, wenn das Jahresergebnis positiv ist.

Was bedeutet ein Wert von 0,8 für diese Aussage? Betrachten wir die Aussage als logische Implikation $A \rightarrow B$, so entspricht dies der Aussage $\neg A \vee B$. Der Wert 0,8 bedeutet somit, dass in 80 % der Fälle die Telekom keine positive Jahresbilanz vermeldet oder die Aktie um 5 % steigt.

Eine zweite Interpretation ist: Wird eine positive Bilanz gemeldet, dann steigt die Aktie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 um 5 %. Dies nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit**.

Der Unterschied zwischen beiden Interpretationen ist signifikant. Betrachten wir den Fall, dass in sieben Fällen eine nicht positive Bilanz vermeldet wird. In drei Fällen wird eine positive Bilanz gemeldet, die Aktie steigt aber nur in einem von diesen drei Fällen um 5 %. Unter der ersten Interpretation wären die 0,8 erfüllt, da für acht von zehn Fällen die logische Implikation zutrifft. Fasst man den Zusammenhang als bedingte Wahrscheinlichkeit auf, so sind die 0,8 nicht erfüllt, da nur in einem von drei Fällen die Aktie gestiegen ist.

Definition 2.19 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei Y ein Ereignis mit $P(Y) > 0$. Dann heißt

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von X unter der Bedingung Y. Falls $P(Y) = 0$, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht definiert.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet sich relativ zum Ereignis Y. Es werden nur die Fälle betrachtet, wo Y eintritt. Diese werden in Relation zu dem Ereignis, wo sowohl Y als auch X eintreten, gesetzt.

Beispiel 2.19 Würfeln

Welchen Wahrscheinlichkeitswert hat die Aussage:

Wenn eine gerade Zahl gewürfelt wird, dann ist dies eine 2.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $G = \{2,4,6\}$ beträgt:

$P(G) = 0,5$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $Z = \{2\}$ beträgt:

$P(Z) = \frac{1}{6}$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit beträgt also:

$P(Z|G) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Stellt man die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit um, so erhält man

$P(X \cap Y) = P(Y) * P(X|Y)$.

Betrachtet man die bedingte Wahrscheinlichkeit von Y bezüglich X, so ergibt sich analog:

$P(Y \cap X) = P(X) * P(Y|X)$.

Da der Mengendurchschnitt kommutativ ist, gilt:

$P(Y) * P(X|Y) = P(X) * P(Y|X)$.

Somit erhält man die **Bayessche Formel**

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X) * P(X)}{P(Y)} \tag{2.1}$$

Beispiel 2.20 Auto

Seien diese Aussagen gegeben:

- Aussage X: Der Motor benötigt einen Ölwechsel.
- Aussage Y: Der Motor des Autos macht seltsame Geräusche.

Es seien folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

- $P(X) = 0,06$
- $P(Y) = 0,08$

Weiterhin sei gegeben, dass ein dringend erforderlicher Ölwechsel in 60 % der Fälle dafür sorgt, dass der Motor seltsame Geräusche verursacht:

- $P(Y|X) = 0,6$

Mit Hilfe der Bayesschen Formel kann nun berechnet werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein seltsames Motorgeräusch auf einen dringend erforderlichen Ölwechsel schließen lässt:

$$P(X|Y) = \frac{0,6 * 0,06}{0,08} = 0,45$$

In vielen praktischen Anwendungen ist es problematisch, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussetzungen zu erfüllen. Hat man analytische Wahrscheinlichkeiten wie beim Würfeln oder auf gesicherten statistischen Erhebungen basierende Wahrscheinlichkeiten, so sind wahrscheinlichkeitstheoretisch fundierte Ansätze zweckmäßig. Baut man dagegen auf rein subjektiven Einschätzungen von Experten auf, so kann ein mit Wahrscheinlichkeiten arbeitender Ansatz schnell zu Inkonsistenzen führen.

Betrachtet man in obigem Beispiel den Fall, dass die gegebenen Wahrscheinlichkeiten subjektiv ermittelt wurden, und setzt man $P(Y) = 0,03$, so ergäbe sich als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X|Y) = 1,2$. Die Ursache für diesen Fehler liegt in den bereits widersprüchlichen subjektiven Werten.

Häufig ist es unmöglich, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen wie $X \wedge Y$ zu berechnen, wenn nicht genügend Informationen bereitstehen. Um diese Wahrscheinlichkeit berechnen zu können, würde man die Information benötigen, inwieweit X und Y miteinander verknüpft sind.

Betrachten wir die Ereignisse:

- Im ersten Wurf wird eine gerade Zahl gewürfelt.
- Im zweiten Wurf wird eine ungerade Zahl gewürfelt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, beträgt 0,25, da die Wahrscheinlichkeiten jeweils 0,5 betragen und in diesem Fall miteinander multipliziert werden können.

Betrachtet man dagegen die Ereignisse:

- Im ersten Wurf wird eine gerade Zahl gewürfelt.
- Im ersten Wurf wird eine ungerade Zahl gewürfelt.

so stellt man fest, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, 0 beträgt, da die Ereignisse nicht gleichzeitig eintreten können. Die Ereignisse sind nicht voneinander *unabhängig*.

Genau betrachtet ist es nicht korrekt, bei subjektiven Maßzahlen von Wahrscheinlichkeiten im Sinne des Wissens um die Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses zu sprechen. Der Begriff **Glauben** ist hier eher angebracht.

Im Folgenden wird deshalb ein einfaches, heuristisches Prinzip der Verarbeitung von Unsicherheit erläutert. Es geht auf das zwar schon betagte, aber immer noch prototypische medizinische Expertensystem MYCIN zurück.

Sicherheitsfaktoren

Sicherheitsfaktoren (**Certainty Factor**, **CF**) sind eine quantitative Bewertung von Aussagen. Man verwendet Zahlen zwischen -1 und 1. Die Zahl -1 bedeutet falsch, 1 steht für wahr. Die Sicherheitsfaktoren werden mit $CF(H|E)$ bezeichnet.

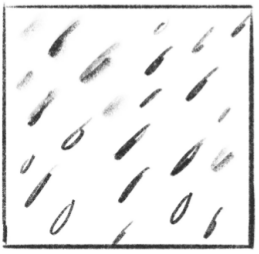
Eine Bewertung der Sicherheit eines Ereignisses H basiert im Allgemeinen auf Erfahrung oder Hintergrundwissen. Dies wird als Evidenz bezeichnet und mit E abgekürzt. Ein „Fakt“ *Es stürmt*, der mit einem CF-Wert von 0,7 angegeben wird, wird in der Form

$$CF(\textit{Es stürmt}|E) = 0,7$$

geschrieben. E steht hier – wie bereits vereinbart – für unsere Beobachtung, unsere Überzeugung (Evidenz).

Sicherheitsfaktoren können auch Regeln zugewiesen werden. Sie sind als unsicherer Zusammenhang zwischen Aussagen zu interpretieren. Betrachten wir folgendes Beispiel:

Regel 1: *Es regnet.* $\xrightarrow{0,9}$ *Es ist schlechtes Wetter.*
Regel 2: *Es stürmt.* $\xrightarrow{0,7}$ *Es ist schlechtes Wetter.*
Regel 3: *Die Sonne scheint.* $\xrightarrow{-0,9}$ *Es ist schlechtes Wetter.*



Die Regeln 1 und 2 drücken aus, welche Argumente es für schlechtes Wetter gibt. Wenn es regnet, kann man mit großer Sicherheit (0,9) davon ausgehen, dass schlechtes Wetter ist. Stürmt es, geht man mit einer Sicherheit von 0,7 davon aus, dass schlechtes Wetter ist. Sonnenschein dagegen spricht gegen die Vermutung, dass schlechtes Wetter ist.

In der ersten Regel ist der Sicherheitsfaktor 0,9 eine Maßzahl für das Vertrauen in das Eintreten des Ereignisses „Es ist schlechtes Wetter“ unter der Voraussetzung „Es regnet“. Dies wird mit

CF(Es ist schlechtes Wetter | Es regnet)

bezeichnet. Die Schreibweise

CF(Es ist schlechtes Wetter | Es regnet) = 0,9

ist eine andere Form der Darstellung der Regel 1.

Wie kann man nun mit diesen Werten Schlüsse ziehen?

Fall 1: Weiß man, dass es regnet, kann man mit einer Sicherheit von 0,9 darauf schließen, dass schlechtes Wetter ist.

$CF(\textit{Es regnet} \mid E) = 1$
$CF(\textit{Es ist schlechtes Wetter} \mid \textit{Es regnet}) = 0,9$

Wir wollen daraus schließen: *Es ist schlechtes Wetter*. Dies entspricht im Prinzip dem Modus ponens:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

Wie berechnet man den Sicherheitsfaktor von *Es ist schlechtes Wetter*?

$$\begin{aligned} CF(\textit{Es ist schlechtes Wetter}) = \\ &= CF(\textit{Es regnet} \mid E) * CF(\textit{Es ist schlechtes Wetter} \mid \textit{Es regnet}) \\ &= 1 * 0,9 = 0,9 \end{aligned}$$

Man multipliziert den Sicherheitsfaktor der Voraussetzung *Es regnet* mit dem Sicherheitsfaktor der Regel.

Fall 2: Was kann man schließen, wenn zusätzlich bekannt ist, dass es stürmt?

$CF(\textit{Es stürmt} \mid E) = 1$

Offensichtlich gibt es zwei Argumente, die dafür sprechen, dass schlechtes Wetter ist. In geeigneter Weise müssen wir die beiden CF-Werte 0,9 und 0,7 miteinander verknüpfen. Seien

$a = CF(\textit{Es ist schlechtes Wetter} \mid \textit{Es regnet}) = 0,9$ und
$b = CF(\textit{Es ist schlechtes Wetter} \mid \textit{Es stürmt}) = 0,7,$

dann ist

$$CF(\textit{Es ist schlechtes Wetter} \mid \textit{Es regnet} \wedge \textit{Es stürmt}) = a + b - a * b = 0,97.$$

Das Vertrauen in *schlechtes Wetter* wird verstärkt.

Diese Formel wurde aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung übernommen. Sie ist allerdings nur dann korrekt, wenn es sich um *unabhängige* Ereignisse handelt.

Fall 3: Es stürmt und die Sonne scheint. Man könnte annehmen, dass die einfache Addition der CF-Werte eine vernünftige Kombination des positiven und negativen Argumentes für schlechtes Wetter darstellt. Es ergibt sich -0,2.

Fall 4: Was ergibt sich aber, wenn es sowohl stürmt und regnet als auch die Sonne scheint? Entsprechend Fall 2 ergibt sich als positives Argument für schlechtes Wetter 0,97, das Gegenargument ergibt -0,9. Bei einer reinen Addition erhielte man einen Wert von 0,07, obwohl zwei Regeln dafür sprechen, nur eine dagegen.

Als Verknüpfung für $CF1$ und $CF2$ wählt man deshalb in diesem Fall:

$$CF = \frac{CF1 + CF2}{1 - \min\{|CF1|, |CF2|\}} \tag{2.2}$$

Mit dieser Verknüpfung erhält man 0,7.

Unsichere Aussagen können die Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\rightarrow$ enthalten. Anhand des Wetter-Beispiels haben wir diskutiert, wie mit den CF-Werten gerechnet werden kann.

Für eine systematische Betrachtung seien folgende Regeln gegeben:

Regel 1: $X \wedge Y \xrightarrow{0,9} H$
Regel 2: $M \vee N \xrightarrow{0,7} H$
Regel 3: $A \xrightarrow{-0,9} H$

Diese CF-Werte seien bekannt:

	X	Y	M	N	A
CF	0,7	1	−0,2	1	0,6

Der Sicherheitswert für komplexe Prämissen wie in Regel 1 und 2 wird durch Maximum- beziehungsweise Minimum-Bildung bestimmt:

$CF(a \wedge b \mid E) = \min(CF(a \mid E),\ CF(b \mid E))$
$CF(a \vee b \mid E) = \max(CF(a \mid E),\ CF(b \mid E))$

Es ergibt sich:

$CF(X \wedge Y \mid E) = 0,7$
$CF(M \vee N \mid E) = 1$

Betrachtet man die Regel $P \xrightarrow{CF} H$ und sei $CF(P \mid E)$ gegeben, so berechnet sich der Sicherheitsfaktor $CF(H \mid E)$ durch:

$CF(H \mid E) = CF(P \mid E) * CF(H \mid P)$

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn

$CF(P \mid E) \geq 0$

gilt. Ist der Wert negativ, so benötigt man eine Regel der Form:

$\neg P \xrightarrow{CF(H \mid \neg P)} H$

Unter Beachtung der Gleichung:

$CF(\neg P \mid E) = -CF(P \mid E)$

erhält man:

$$CF(H \mid E) = CF(\neg P \mid E) * CF(H \mid \neg P) = -CF(P \mid E) * CF(H \mid \neg P)$$

Der Schluss von P auf H entspricht dem Modus ponens. Ist der Sicherheitswert negativ und ist keine Regel für den komplementären Fall gegeben, so ist die Anwendung des Modus ponens nicht sinnvoll. In diesem Fall wird man den CF-Wert auf null setzen.

In obigem Beispiel erhält man mit Regel 1:

$$CF(H_1 \mid E_1) = CF(H_1 \mid X \wedge Y) * CF(X \wedge Y \mid E_1) = 0,63$$

Analog ergibt sich mit Regel 2 und 3:

$$CF(H_2 \mid E_2) = 0,7$$
$$CF(H_3 \mid E_3) = -0,54$$

Die Verknüpfung erfolgt wie bereits im Wetterbeispiel motiviert.

Seien die Regeln

$$\textit{Regel 1:} \quad P \xrightarrow{CF(H|P)} H$$
$$\textit{Regel 2:} \quad Q \xrightarrow{CF(H|Q)} H$$

gegeben. Seien $x = CF(H|E_1)$ und $y = CF(H|E_2)$ die sich aus beiden Regeln ergebenden Sicherheitsfaktoren. Dann berechnet sich der kombinierte Sicherheitsfaktor durch:

$$CF(H \mid E_1, E_2) = \begin{cases} x + y - x * y & \text{falls } x, y \geq 0 \\ x + y + x * y & \text{falls } x, y < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{falls } x * y = -1 \\ \frac{x+y}{1-\min(|x|,|y|)} & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.3}$$

Der Fall, dass sowohl x als auch y positiv sind, entspricht dem Fall, dass zwei bestärkende Aussagen für H vorliegen. Analog wird verfahren, wenn beide Informationen gegen H sprechen. Sind bestärkende und Gegenargumente bezüglich H bekannt, so erfolgt die Verknüpfung entsprechend der im Wetter-Beispiel motivierten Formel.

Den Fall

$$x * y = -1$$

müssen wir gesondert betrachten, da offensichtlich zwei widersprüchliche Informationen vorliegen. Es ist im Allgemeinen nicht sinnvoll, hier ein Resultat zu definieren.

Die CF-Funktion ist kommutativ und insbesondere auch assoziativ, so dass die Reihenfolge der Anwendung keine Rolle spielt.

Für unser Beispiel ergibt sich mit den bereits berechneten Werten:

$$CF(H_1 \mid E_1) = 0,63$$
$$CF(H_2 \mid E_2) = 0,7$$
$$CF(H_3 \mid E_3) = -0,54$$
$$CF(H_{12} \mid E_1, E_2) = 0,63 + 0,7 - 0,63 * 0,7 = 0,889$$
$$CF(H \mid E_1, E_2, E_3) = \frac{0,889-0,54}{1-0,54} = 0,759$$

Die Verknüpfungen sind zusammenfassend in Tabelle 2.15 auf der nächsten Seite dargestellt.

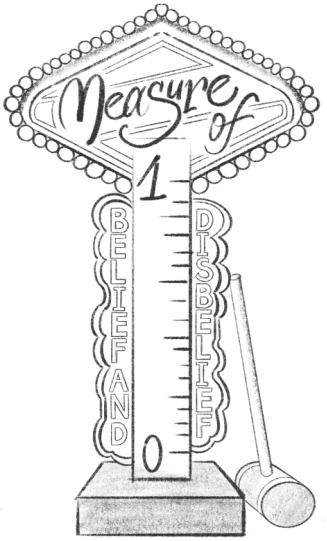
Tabelle 2.15 Verknüpfung von CF-Werten

Verknüpfung		CF-Wert	Bedingung
Und	$CF(a \wedge b \mid E)$	$\min(CF(a \mid E), CF(b \mid E))$	
Oder	$CF(a \vee b \mid E)$	$\max(CF(a \mid E), CF(b \mid E))$	
Negation	$CF(\neg P \mid E)$	$-CF(P \mid E)$	
Regel	$CF(H \mid E)$	$CF(P \mid E) * CF(H \mid P)$	
zwei CF für H	$CF(H \mid E_1, E_2)$	$CF_1 + CF_2 - CF_1 * CF_2$	CF_1 und CF_2 positiv
		$CF_1 + CF_2 + CF_1 * CF_2$	CF_1 und CF_2 negativ
		$\frac{CF_1+CF_2}{1-\min(\lvert CF_1\rvert,\lvert CF_2\rvert)}$	$-1 < CF_1 * CF_2 < 0$
		undefiniert	$CF_1 * CF_2 = -1$

Bemerkung

Wie bekommt man die CF-Werte für die Fakten wie *Es stürmt* oder *Es regnet*?

Analog zu den Regeln kann auch bei Elementaraussagen die Wahrscheinlichkeit für oder gegen ein Ereignis sprechen.



Man bezeichnet die Glaubwürdigkeit einer Aussage H unter der Annahme einer Beobachtung oder Überzeugung E als **Measure of belief** *MB(H,E)*. Spricht eine Evidenz E gegen das Zutreffen einer Aussage H, so spricht man von **Measure of disbelief** *MD(H,E)*. Beide Werte müssen zwischen 0 und 1 liegen.

Was spricht gegen, was spricht für die Aussage, dass Rostock an der Ostsee liegt? Rostock ist eine Hafenstadt. Dies spricht uneingeschränkt dafür:

$MB(\textit{Rostock liegt an der Ostsee} \mid E) = 1,0$

Dagegen spricht, dass man vom Stadtzentrum immerhin ca. 15 km zurücklegt, um an die Ostsee zu gelangen.

$MD(\textit{Rostock liegt an der Ostsee} \mid E) = 0,2$

Aus diesen beiden Werten kann man durch Differenzbildung den Sicherheitsfaktor bestimmen:

$CF(H \mid E) = MB(H \mid E) - MD(H \mid E) = 1,0 - 0,2 = 0,8$

Dieses Konzept wurde in MYCIN verwendet. Sicherheitsfaktoren basieren auf Erfahrungen, die für ein Ereignis sprechen und auf Erfahrungen, die gegen ein Ereignis sprechen.

Es gibt eine Reihe von weiterführenden Konzepten, die auf den Sicherheitsfaktoren oder auf den Wahrscheinlichkeiten aufbauen. Zu nennen sind die Inferenznetzwerke [DHN76], die auf der Bayesschen Formel oder auf deren Modifikationen basieren. In [BHSA07] sind die Bayesschen Netze, die auf den Konzepten der Unabhängigkeit beziehungsweise Abhängigkeit von Aussagen beruhen, erklärt. Durch Dempster und Shafer wurden Vertrauensintervalle eingeführt, die auf Vertrauen und Plausibilität basieren [BHSA07].

2.6.2 Fuzzy-Mengen

Nach der Betrachtung von unsicheren Aussagen schauen wir uns an, wie unscharfe Eigenschaften behandelt werden. Zunächst wird dargestellt, wie unscharfe Begriffe modelliert werden können.

Die Eigenschaft, dass die Schweriner Firma PlanetIC eine GmbH ist, kann durch die logische Aussage

firma(PlanetIC, GmbH)

dargestellt werden. Dies ist keine vage Aussage, sondern eine Aussage, die wahr ist.

Man hätte dies auch in Form einer relationalen Datenbank darstellen können (Bild 2.16).

Tabelle 2.16 Firmen und ihre Rechtsformen in einer Datenbank-Tabelle

Firma	Rechtsform
...	...
Planet IC	GmbH
Siemens	AG
...	...

Dies sind typische Darstellungsformen für Eigenschaften oder Zusammenhänge:

- Relationen, Mengen und Teilmengen
- Prädikate, Wahrheitswerte

Beide Darstellungsformen erlauben jedoch nicht die Darstellung unscharfer Aussagen. Dazu eignen sich die Fuzzy-Mengen. Die Grundlage der Fuzzy-Mengen bilden die so genannten charakteristischen Funktionen, die die Zugehörigkeit zu einer Klasse beschreiben. Die charakteristische Funktion, die die Zugehörigkeit der natürlichen Zahlen zur Menge der geraden Zahlen beschreibt, ist in Bild 2.13 dargestellt.

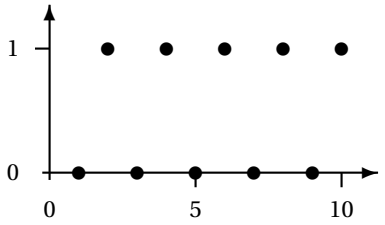


Bild 2.13 Charakteristische Funktion für die geraden Zahlen

Dieses Konzept kann man auf unscharfe Aussagen übertragen. Dazu wird der Begriff *groß* betrachtet. Wann bezeichnet man eine Person als groß? Die Antwort wird zum einen davon abhängen, wen wir befragen. Zum anderen werden die meisten Befragten bei der Bewertung einer Körpergröße von 1,70 m nicht mit einem klaren *nicht groß* oder *groß* antworten.

- Man kann davon ausgehen, dass eine Person, die 2,10 m groß ist, von allen als groß angesehen wird. Ein Säugling hingegen wird von allen als nicht groß angesehen.
- Ein Basketballspieler einer Größe von 2,20 m wird eine Person von 1,80 m wohl kaum als groß bezeichnen. Für Kinder ist eine 1,80 m große Person aber sehr wohl groß.

Dies führt zu der Überlegung, dass man das Konzept der charakteristischen Funktion auf den Begriff **groß** anpasst. Man lässt auch Zugehörigkeitswerte zwischen 0 und 1 zu:

- Personen, die kleiner als 1 m sind, sind nicht groß (Zugehörigkeitswert 0).
- Personen, die über 2 m sind, sind groß (Zugehörigkeitswert 1).
- Personen zwischen 1 und 2 m bekommen einen Zugehörigkeitswert zwischen 0 und 1.

Eine mögliche Zugehörigkeitsfunktion ist in Bild 2.14 dargestellt.

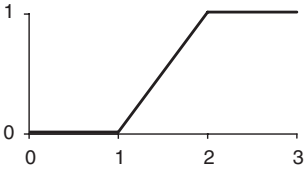


Bild 2.14 Zugehörigkeitsfunktion für *groß*

Wir haben es hier somit mit einer Abbildung zu tun, die beschreibt, mit welchem Wert ein Objekt eine Eigenschaft erfüllt.

Definition 2.20 Fuzzy-Menge

Eine **Fuzzy-Menge** Z über einer Referenzmenge X ist eine Teilmenge aus $X \times [0,1]$. Z wird beschrieben durch die Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_Z : X \rightarrow [0,1]$$

$z = (x, s)$ ist in der Fuzzy-Menge Z enthalten genau dann, wenn gilt:

$$\mu_Z(x) = s$$

Mit $F(X)$ sei die Menge aller Fuzzy-Mengen über X bezeichnet.

In vielen Büchern wird die Fuzzy-Menge kommentarlos mit der Zugehörigkeitsfunktion gleichgesetzt. Beide sind nicht identisch. Die Zugehörigkeitsfunktion ist aber eine effektive Beschreibungsmöglichkeit für eine Fuzzy-Menge, so dass im Rahmen dieses Abschnitts ebenfalls auf die Zugehörigkeitsfunktion als Darstellung für eine Fuzzy-Menge zurückgegriffen wird.

Die in Bild 2.14 dargestellte Zugehörigkeitsfunktion ist so zu interpretieren, dass eine Person mit der Größe

- 0,90 m nicht groß,
- 2,10 m groß,
- 1,50 m groß mit einer Zugehörigkeit von 0,5 ist.

Die Zahl 1 steht dafür, dass man mit Sicherheit davon ausgeht, dass die Eigenschaft erfüllt ist. Die Zahl 0 steht dafür, dass die Eigenschaft nicht erfüllt ist. Eine Bewertung von 0,5 bedeutet, dass man zu 50 % davon ausgeht, dass die Eigenschaft erfüllt ist.

Analog zur Darstellung von *groß* kann eine Fuzzy-Menge für *klein* entwickelt werden.

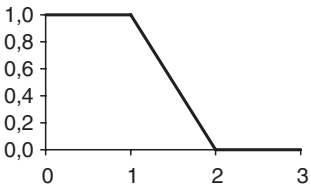


Bild 2.15 Zugehörigkeitsfunktion für *klein*

Bei der Definition von Fuzzy-Mengen ist es möglich, sich von der Abbildung auf das Intervall $[0,1]$ zu lösen und endliche Mengen zuzulassen. Für die Häufigkeit von Ereignissen kann eine diskrete Beschreibung durch Begriffe wie selten, wahrscheinlich, sicher erfolgen. Die Bewertungsgrößen sind in diesem Fall sogar total geordnet:

unmöglich < *sehr selten* < *selten* < *unwahrscheinlich* < *manchmal* < *Chance ist 50:50* < < *wahrscheinlich* < *oft* < *meistens* < *fast immer* < *so gut wie sicher* < *sicher*

Im diesem Abschnitt werden nur Fuzzy-Mengen betrachtet und die diskreten Darstellungsformen außer Acht gelassen, da diese nur ein Spezialfall der Fuzzy-Mengen sind. Die folgenden Betrachtungen lassen sich also auf den diskreten Fall übertragen.

Rechnen mit Fuzzy-Mengen

Das Ziel der Überlegungen ist auch hier die Automatisierung der Wissensverarbeitung. Wollen wir Fuzzy-Mengen zur Wissensrepräsentation nutzen, so müssen wir überlegen, wie mit ihnen gerechnet werden kann. Dazu sind zwei Fragen zu beantworten:

1. Wie repräsentiert man Fuzzy-Mengen? Insbesondere steht hier natürlich die Frage der **endlichen** Repräsentation im Vordergrund.
2. Wie verknüpft man Fuzzy-Mengen, wie berechnet man den Durchschnitt, die Vereinigung von zwei Fuzzy-Mengen?

Da Fuzzy-Mengen auf einem Computer dargestellt werden sollen, benötigen wir eine *endliche* Darstellung. Die endliche Repräsentation einer Fuzzy-Menge ist kein Problem, wenn

- die Referenzmenge X endlich ist oder
- die Zugehörigkeitsfunktion als analytischer Ausdruck vorliegt.

Ist die Referenzmenge endlich, so stellt man eine Fuzzy-Menge als die Menge aller Paare dar. Ist die Referenzmenge nicht endlich, so benötigen wir eine endliche Darstellung der Zugehörigkeitsfunktion μ. Klassische Vertreter sind die stückweise linearen Funktionen.

Eine **stückweise lineare Funktion** liegt vor, wenn

- die Referenzmenge X in endlich viele Intervalle aufgeteilt werden kann, so dass
- sich die Zugehörigkeitsfunktion μ in jedem Intervall linear verhält.

Man setzt bei stückweise linearen Funktionen im Allgemeinen Stetigkeit voraus; die Funktion enthält also keine Sprünge. Man kann stückweise lineare Funktionen dann durch die Angabe der Anfangs- und Endpunkte der entsprechenden Intervalle darstellen.

Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{groß}$ ist eine stückweise lineare Funktion. Sie lässt sich darstellen durch:

$[(0,0),(1,0),(2,1),(3,1)]$

Um mit Fuzzy-Mengen zu rechnen, muss man die klassischen Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen anwenden können. Wir suchen also Antworten auf folgende Fragen:

- Wie sieht der Durchschnitt der Fuzzy-Mengen *groß* und *klein* aus?
- Ist die Fuzzy-Menge *manchmal* enthalten in der Fuzzymenge *oft*?

Definition 2.21 Teilmengenbeziehung zwischen Fuzzy-Mengen

Seien Z und Z' zwei Fuzzy-Mengen über X.

Z heißt **Teilmenge** von Z': $Z \subseteq Z'$ genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt: $\mu_Z(x) \leq \mu_{Z'}(x)$.

Die Fuzzy-Menge Z ist Teilmenge der Fuzzy-Menge Z', wenn für jedes Objekt aus der Bezugsmenge X die Zugehörigkeit zu Z kleiner als die Zugehörigkeit zu Z' ist (oder gleich).

Analog führt man die Berechnung des Durchschnitts und die Berechnung der Vereinigung von Fuzzy-Mengen auf das Verknüpfen der jeweiligen Zugehörigkeitswerte zurück.

Will man die Zugehörigkeit von x zur Menge *groß* $\cap$ *klein* berechnen, so verknüpft man in geeigneter Weise die Zugehörigkeitswerte $\mu_{groß}(x)$ und $\mu_{klein}(x)$. In Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man dies durch die Multiplikation tun. Diese Verknüpfungsfunktion wird mit S bezeichnet und muss eine Reihe von Eigenschaften erfüllen.

Definition 2.22 Durchschnitt von Fuzzy-Mengen

Sei $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ eine Funktion mit diesen Eigenschaften:

$S(a,1) = a$	für $a \in [0,1]$	
$a \leq b \rightarrow S(a,c) \leq S(b,c)$	für $a,b,c \in [0,1]$	Monotonie
$S(a,b) = S(b,a)$	für $a,b \in [0,1]$	Kommutativität
$S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$	für $a,b,c \in [0,1]$	Assoziativität

Der Durchschnitt von zwei Fuzzy-Mengen Z_1 und Z_2 wird definiert durch die Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_{Z_1 \cap Z_2}(x) = S(\mu_{Z_1}(x),\ \mu_{Z_2}(x))$.

Man bezeichnet eine solche Funktion S als **t-Norm**.

- $S(a,1) = a$ für $a \in [0,1]$
  Da der Zugehörigkeitswert 1 dafür steht, dass das Element mit Sicherheit zur Fuzzy-Menge Z_2 gehört, ist plausibel, dass der Zugehörigkeitswert des Durchschnitts dem Zugehörigkeitswert zur Menge Z_1 entsprechen muss.
- $a \leq b \rightarrow S(a,c) \leq S(b,c)$ für $a,b,c \in [0,1]$ (Monotonie)
  Ist der Zugehörigkeitswert zur Menge Z_1 nicht größer als der Zugehörigkeitswert zur Menge Z_2, so sollte dieser Größenvergleich bei der Durchschnittsbildung mit einer beliebigen anderen Fuzzy-Menge erhalten bleiben.
- $S(a,b) = S(b,a)$ für $a,b \in [0,1]$ (Kommutativität)
  $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$ für $a,b,c \in [0,1]$ (Assoziativität)
  Ob man Z_1 und Z_2 verknüpft oder Z_2 und Z_1, darf keine Rolle spielen; die Reihenfolge darf keine Auswirkung auf das Resultat haben. Verknüpft man mehrere Fuzzy-Mengen, so darf das Resultat nicht davon abhängen, mit welchen Mengen man beginnt.

Beispiel 2.21 t-Normen

Folgende Funktionen sind t-Normen:

1. $S(a,b) = \min(a,b)$
2. $S(a,b) = \max(0, a+b-1)$
3. $S(a,b) = a * b$

Beachten Sie, dass durch die Multiplikation von zwei stückweise linearen Funktionen im Allgemeinen eine Zugehörigkeitsfunktion entsteht, die nicht mehr stückweise linear ist.

Wählt man als t-Norm das Minimum, so entsteht für den Durchschnitt von *groß* und *klein* folgende Zugehörigkeitsfunktion:

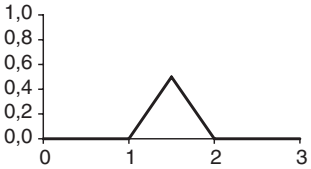


Bild 2.16 Zugehörigkeitsfunktion für *„groß und klein"*

Die entstandene Fuzzy-Menge widerspiegelt, dass kleine Personen beziehungsweise große Personen nicht gleichzeitig groß und klein sind. Mittelgroße Personen dagegen können bis zu einem gewissen Grade gleichzeitig als groß und klein angesehen werden.

Definition 2.23 Vereinigung von Fuzzy-Mengen

Sei $V : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ eine Funktion mit diesen Eigenschaften:

$V(a,0) = a$	für $a \in [0,1]$	
$a \leq b \rightarrow V(a,c) \leq V(b,c)$	für $a,b,c \in [0,1]$	Monotonie
$V(a,b) = V(b,a)$	für $a,b \in [0,1]$	Kommutativität

Die Vereinigung von zwei Fuzzy-Mengen Z_1 und Z_2 wird definiert durch die Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_{Z_1 \cup Z_2}(x) = V(\mu_{Z_1}(x),\ \mu_{Z_2}(x))$.

Man bezeichnet eine solche Funktion als **t-CoNorm**.

Beispiel 2.22 t-CoNormen

Folgende Funktionen sind t-CoNormen:

1. $V(a,b) = \max(a,b)$
2. $V(a,b) = \min(1, a+b)$
3. $V(a,b) = a + b - a * b$

Wählt man als t-CoNorm das Maximum, so entsteht für die Vereinigung von groß und klein folgende Zugehörigkeitsfunktion:

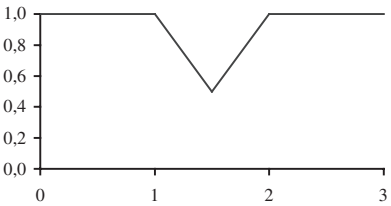


Bild 2.17 Zugehörigkeitsfunktion für *„groß oder klein“*

Für kleine Personen beziehungsweise große Personen gilt mit Sicherheit, dass sie *groß* oder *klein* sind. Die mittelgroßen Personen gehören nicht mit Sicherheit zu dieser Menge.

Analog kann man das Komplement einer Fuzzy-Menge definieren.

Definition 2.24 Komplement einer Fuzzy-Menge

Sei Z eine Fuzzy-Menge. Das Komplement Z^c wird durch folgende Zugehörigkeitsfunktion definiert: $\mu_{Z^c}(x) = 1 - \mu_Z(x)$.

In Bild 2.18 auf der nächsten Seite ist die Fuzzy-Menge für *nicht klein* dargestellt.

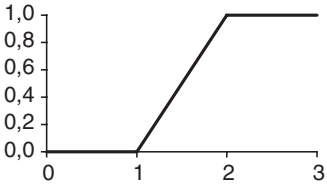


Bild 2.18 Zugehörigkeitsfunktion für *„nicht klein“*

2.6.3 Fuzzy-Logik

Im Abschnitt 2.3 haben wir die Logik als Wissensrepräsentationssprache behandelt. In der klassischen Logik arbeitet man nur mit den Wahrheitswerten 0 und 1. Wie kann man dieses Konzept erweitern, so dass auch mit Eigenschaften wie schnell oder groß umgegangen werden kann? Das „Aufweichen“ dieses Konzeptes kann mit Fuzzy-Mengen geschehen. Eine atomare Aussage ist nun keine Aussage, die wahr oder falsch ist, sondern eine Fuzzy-Menge.

- Wie kann man Aussagen verknüpfen?
- Was bedeutet die Aussage $A \wedge B$, wenn A und B unscharfe Begriffe sind?
- Wie berechnet man die logischen Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$?

Wir haben bereits vorgearbeitet: Für die Negation, das Oder und das Und können die Mengenverknüpfungen des vorherigen Abschnitts verwendet werden.

Tabelle 2.17 Logische Verknüpfungen und zugehörige Mengenoperationen

Verknüpfung	Mengenoperation
$\wedge$	Durchschnitt
$\vee$	Vereinigung
$\neg$	Komplement

Für die Berechnung des logischen Und wird eine t-Norm verwendet, für das logische Oder eine t-CoNorm. Die gewählte t-Norm und die gewählte t-CoNorm müssen zueinander passen, um in der klassischen Logik geltende Aussagen auch hier zu erfüllen. Wählt man als t-Norm das Minimum, als t-CoNorm das Maximum, so gilt auch in der Fuzzy-Logik die Aussage:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

Denn es gilt:

$$\mu_{A\vee(A\wedge B)}(x) = \max(A(x), \min(A(x), B(x))) = A(x)$$

Die in den Beispielen 2.21 und 2.22 aufgeführten t-Normen und t-CoNormen passen zueinander, und zwar jeweils die ersten, zweiten und dritten.

Für die Implikation können wir die in Tabelle 2.18 dargestellten Verknüpfungen verwenden.

Betrachten wir ein Beispiel. Wir wollen in den Urlaub fahren. Wichtige Kriterien sind für uns:

- Der Urlaub soll möglichst in die Ferienzeit 20. Juni - 10. August fallen.
- Wir wollen an die See.
- Die Reise soll preiswert oder der Urlaubsplatz „sonnensicher“ sein.

Tabelle 2.18 Logische Implikation

Name	$\mu_{A \rightarrow B}(x)$
Lukasiewicz	$\min(1,\ 1-\mu_A(x)+\mu_B(x))$
Kleene-Dienes	$\max(1-\mu_A(x),\ \mu_B(x))$
Zadeh	$\max(1-\mu_A(x),\ \min(\mu_A(x),\ \mu_B(x)))$
Reichenbach	$1-\mu_A(x)+\mu_A(x)*\mu_B(x)$

Uns liegen drei Angebote vor.

Reiseziel	Zeitraum	Preis
Wismar	19.6.-2.7	1000
Bordeaux	1.7.-14.7.	2000
Mallorca	30.7.-12.8.	1800

Aus diesen Angeboten wollen wir mithilfe der Fuzzy-Logik das Angebot auswählen, welches am besten auf unsere Anforderungen passt.

Die Fuzzy-Werte für die Bewertung, ob der Ferienplatz an der See liegt oder der Urlaubsplatz „sonnensicher“ ist, werden empirisch festgelegt. Als Zugehörigkeitsfunktion für die Fuzzy-Menge „preiswert“ nehmen wir die in Bild 2.19 dargestellte, stückweise lineare Funktion.

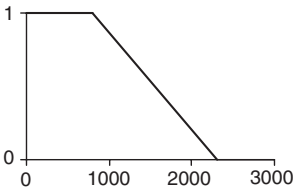


Bild 2.19 Zugehörigkeitsfunktion für „preiswert“

Da wir eigentlich in der Ferienzeit verreisen wollten, zwei Angebote aber nicht vollständig in dieser Zeit liegen, bewerten wir die Angebote auch bezüglich ihrer Überdeckung mit der geforderten Zeit. Die Bewertung wird als Quotient aus der Zahl der Tage innerhalb des Zeitraum und der Gesamtzahl von 14 Tagen berechnet.

Die Berechnung erfolgt in drei Varianten für die t-Norm und t-CoNorm (vgl. Beispiele 2.21 und 2.22).

Für Variante 1 ergibt sich beispielsweise für den Urlaubsplatz Wismar:

$$\text{Sonne} \vee \text{preiswert} : \max(0,87;0,8) = 0,87$$
$$\text{Zeitraum} \wedge \text{See} \wedge (\text{Sonne} \vee \text{preiswert}) : \min(0,93;0,95;0,87) = 0,87$$

Die komplette Übersicht ist in Tabelle 2.19 auf der nächsten Seite enthalten.

Bleibt noch zu klären, ob die Resolutionsregel auch auf Fuzzy-Aussagen anwendbar ist. Dies ist der Fall:

$A \vee B$	z_1
$\neg A \vee C$	z_2
$B \vee C$	$\min(z_1, z_2)$

Durch die Verwendung des Minimums wird die Fuzzy-Funktion einer Resolvente immer kleiner als die Eltern-Fuzzy-Funktionen (oder gleich) sein. Die Gefahr besteht, dass bei einer lan-

Tabelle 2.19 Ferienplanung mit Fuzzy-Logik

Reiseziel	Wann	Fuzzy Zeit	Fuzzy Preis	Fuzzy Sonne	Fuzzy See	Var. 1	Var. 2	Var. 3
Wismar	19.6.-2.7.	0,93	0,87	0,8	0,95	0,87	0,88	0,86
Bordeaux	1.7.-14.7.	1	0,2	0,9	0,8	0,8	0,8	0,74
Mallorca	30.7.-12.8.	0,86	0,33	0,95	0,99	0,86	0,85	0,82

gen Schlusskette der Widerspruch zwar gefunden wird, die zugehörige Fuzzy-Funktion aber relativ nahe bei null ist.

Fuzzy-Logik und PROLOG

PROLOG-Programme bestehen aus Regeln:

$$H \leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$$

und Fakten:

$$H \leftarrow$$

Man kann PROLOG mit Hilfe der Fuzzy-Resolutionsregel oder mit Hilfe einer Fuzzy-Modus-Ponens-Regel auf Fuzzy-Logik-Ebene „liften“.

Der Modus ponens sieht in der Fuzzy-Logik wie folgt aus:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & z_1 \\ A & z_2 \\ \hline B & z_1 * z_2 \end{array}$$

2.6.4 Fuzzy-Regler

In Kapitel 5 wird anhand des Fahrradfahrens gezeigt, dass wir Menschen bestimmte Fähigkeiten haben, die nicht ohne weiteres auf einen Computer übertragbar sind, da der Mensch bestimmte Fähigkeiten erlernt und Aufgaben erfüllt, ohne dass er darüber „nachdenkt“.

Typische Erfahrungsregeln des Menschen sind:

- Wenn die Gefahr groß, dann laufe schnell.
- Wenn das Motorengeräusch laut ist, dann ist das Fahrzeug nah.
- Wird das Motorengeräusch lauter, so kommt das Fahrzeug näher.
- Wenn das Ziel nah und die Geschwindigkeit groß ist, dann bremse stark.

Diese unscharfen Regeln und die erlernten Assoziationen zu den unscharfen Begriffen wie nah, laut, groß erlauben es uns Menschen, in bestimmten Situationen schnell zu reagieren.

Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie man Fuzzy-Mengen benutzen kann, um mit derartigen Regeln arbeiten zu können. Dies wird am Beispiel einer zum Fahrradfahren analogen Aufgabe erläutert.

Das inverse Pendel

Ein Stab soll balanciert werden. Es darf nur das untere Ende des Stabes bewegt werden.

Die zur Verfügung stehenden Messgrößen sind der Winkel γ sowie die Winkelgeschwindigkeit γ'. Die einzige Möglichkeit der Einflussnahme ist es, eine horizontale Kraft am unteren Ende des Stabes anzulegen.

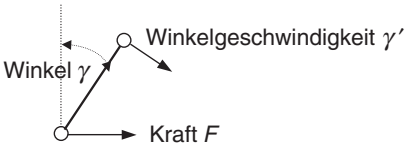


Bild 2.20 Messgrößen am inversen Pendel

Im Gegensatz zur klassischen Lösung, wo über eine numerische Modellierung die anzulegende Kraft bestimmt wird, wird hier über einfache Regeln ein Balancieren erreicht.

Der Wertebereich für den Winkel beträgt $[-90, 90]$, gemessen in Grad. Die Winkelgeschwindigkeit ist die erste Ableitung des Winkels nach der Zeit und hat einen Wertebereich von $[-50, 50]$, gemessen in Grad pro Sekunde. Der Wertebereich für die Kraft F sei $[-10, 10]$, gemessen in Newton.

Eine Regel zur Steuerung des Pendels ist:

WENN γ ist positiv klein UND γ' ist etwa null DANN F ist positiv klein.

Wenn das Pendel einen kleinen positiven Ausschlag hat und die Winkelgeschwindigkeit ungefähr null ist, dann muss eine geringe, positive Kraft angelegt werden.

Man hat auf der einen Seite **Messgrößen**, auf der anderen Seite **Stellgrößen**.

- Linke Seite einer Regel: Messgrößen
- Rechte Seite einer Regel: Stellgrößen

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass n Messgrößen

$x_1 \in Y_1, x_2 \in Y_2, \ldots, x_n \in Y_n$

sowie eine Stellgröße

$z \in Z$

vorliegen. Regeln haben dann die Form:

Regel_j : WENN Y_1 IST x_{1j} UND … UND Y_n IST x_{nj} DANN Z IST z_j

Fuzzy-Regeln haben die gleiche Struktur wie die in Abschnitt 2.4 eingeführten Regeln.

Offen ist hier die Modellierung der Begriffe „etwa null“, „positiv klein“. Dazu kann man die Fuzzy-Mengen verwenden. Die Begriffe „etwa null“ und „positiv klein“, bezogen auf den Winkel γ, können durch die in Bild 2.21 auf der nächsten Seite dargestellten Dreiecksfunktionen charakterisiert werden.

Die Zuordnung eines Messwertes zu den Fuzzy-Mengen wird als **Fuzzyfizierung** bezeichnet.

Die Regeln für die Kontrolle des Pendels sind in der Matrix in Tabelle 2.20 auf der nächsten Seite dargestellt.

Dabei bedeutet ein positiver Winkel γ einen Ausschlag des Pendels nach rechts. Eine positive Kraft wirkt nach rechts.

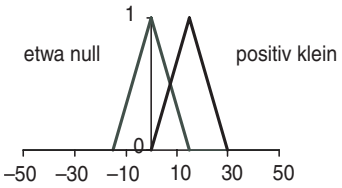


Bild 2.21 Zugehörigkeitsfunktion für „etwa null“, „positiv klein“

Tabelle 2.20 Fuzzy-Regler für inverses Pendel

γ' \ γ	ng	nm	nk	en	pk	pm	pg
ng				ng			
nm				nm			
nk			nm	nk	en		
en	ng	nm	nk	en	pk	pm	pg
pk			en	pk	pm		
pm				pm			
pg				pg			

Die Bezeichnungen für die unscharfen Werte positiv, negativ, klein, mittel, groß haben wir abgekürzt, „pg“ steht für „positiv groß“, „en“ für „etwa null“.

In der Tabelle sind nur einzelne Felder gefüllt. Zum einen ist es in bestimmten Extrem-Situationen sinnlos, einen Rettungsversuch zu starten. Ist der Winkel schon sehr groß, und ist die Winkelgeschwindigkeit ebenfalls „in die gleiche Richtung“ groß, wird der Versuch ohnehin scheitern, den Stab wieder in das Gleichgewicht zu bringen. Zum anderen möchten wir nicht die Lösung einer Übungsaufgabe vorwegnehmen.

Wie kann mit diesen Regeln der Stab balanciert werden? Im allgemeinen kommen mehrere Regeln in Frage.

Wir betrachten den Fall $\gamma = 0$, $\gamma' = -3$. Der Stab befindet sich zwar im Gleichgewicht, bewegt sich aber nach links. Definiert man die Fuzzy-Mengen für γ gemäß Bild 2.21, kommen nur Regeln, die den Winkel mit „etwa null“ einstufen, in Betracht. Sind die FuzzyMengen für die Winkelgeschwindigkeit wie in Bild 2.22 definiert, so kommen zwei Regeln in Frage.

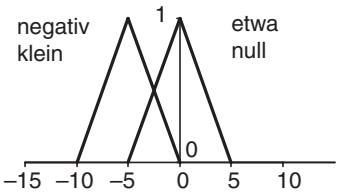


Bild 2.22 Zugehörigkeitsfunktion für „negativ klein“, „etwa null“

- WENN γ IST etwa null UND γ' IST etwa null DANN F IST etwa null
- WENN γ IST etwa null UND γ' IST negativ klein DANN F IST negativ klein

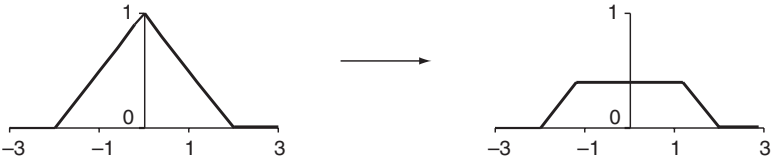
Das Minimum der Zugehörigkeitswerte der Bedingungen ergibt für die beiden Regeln:

$c_1 = \min(b_{11}, b_{21}) = \min(1; 0,4) = 0,4$
$c_2 = \min(b_{12}, b_{22}) = \min(1; 0,6) = 0,6$

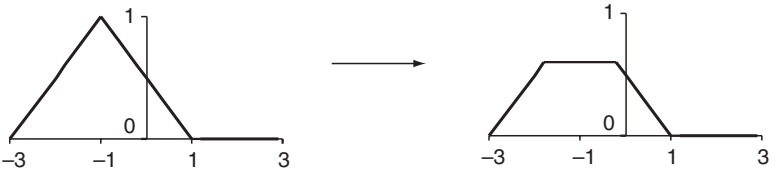
Für alle anderen Regeln gilt $c_i = 0$.

Jede Regel liefert eine Fuzzy-Menge, die zur Anwendung kommen könnte. Eine Fuzzy-Menge ist aber wenig hilfreich. Man benötigt einen exakten Wert für die anzulegende Kraft.

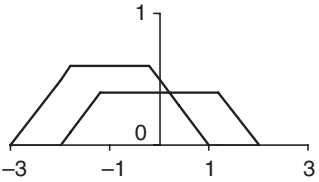
Wie wird die anzulegende Kraft berechnet? Zunächst beschränkt man die Zugehörigkeitsfunktion für *F etwa null* auf den Zugehörigkeitswert $c_1 = 0,4$.



Analog beschränkt man die Zugehörigkeitsfunktion für *F negativ klein* auf $c_2 = 0,6$.



Nun wird der Schwerpunkt der aus beiden Flächen entstehenden gemeinsamen Fläche berechnet.



Der x-Wert unter diesem Schwerpunkt wird als Stellwert genommen. Es wird eine Kraft von ca. -0,57 N angelegt.

Dieses Vorgehen wird **Schwerpunktmethode** genannt. Man bezeichnet das Berechnen eines exakten Wertes aus einer Fuzzy-Menge als **Defuzzyfizierung**.

Die allgemeine Architektur eines Fuzzy-Reglers ist in Bild 2.23 auf der nächsten Seite dargestellt.

Die Wissensbasis besteht aus Regeln und Fuzzy-Mengen. Für alle Messwerte wird ihr Zugehörigkeitswert zu den Fuzzy-Mengen bestimmt. Mit diesen Werten werden alle Bedingungen aller Regeln überprüft. Mit der Schwerpunktmethode wird der Stellwert berechnet.

Im WWW stehen unter der Adresse *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* weitere Beispiele und Informationen. Dort sind auch Hinweise zu anderen Logiken verfügbar, beispielsweise zum Umgang mit unvollständigem Wissen.

Übung 2.35 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beweisen Sie die Gültigkeit von $P(A \mid A \cap B) = 1$.

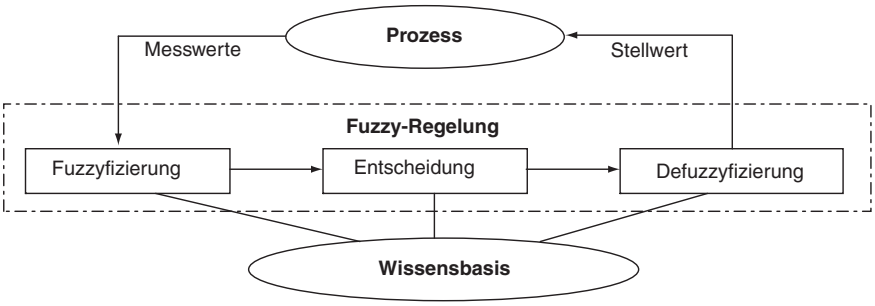


Bild 2.23 Architektur eines Fuzzy-Reglers

Übung 2.36 Sicherheitsfaktoren

Seien folgende Werte gegeben: $MB(x_1) = 0,4$, $MB(x_2) = 0,8$, $MD(x_1) = 0,1$, $MD(x_2) = 0,4$. Berechnen Sie $CF(x_1 \vee x_2)$ und $CF(x_1 \wedge x_2)$.

Übung 2.37 Sicherheitsfaktoren

Gegeben seien die Regeln:

$$\begin{aligned}
&\text{Regel 1:} && A \vee B \vee C && \xrightarrow{0,6} && Z \\
&\text{Regel 2:} && D && \xrightarrow{0,8} && Z \\
&\text{Regel 3:} && M \wedge N && \xrightarrow{0,4} && H \\
&\text{Regel 4:} && Z && \xrightarrow{0,6} && H
\end{aligned}$$

Berechnen Sie den Sicherheitsfaktor für H, wenn $MB(A) = 0$, $MB(B) = 0,7$, $MB(C) = MB(D) = 0,4$, $MB(M) = 0,3$, $MB(N) = 0,8$, $MD(B) = 0,1$ und alle anderen MD gleich 0 sind.

Übung 2.38 Bayessche Formel

Marianne möchte sich eine neue Festplatte kaufen. Sie betrachtet dazu drei verschiedene Produkte A, B und C. Seien die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass Marianne A, B oder C wählt, sowie dafür, dass eine bestimmte Marke innerhalb von 1 Jahr defekt ist, gegeben:

Marke	Wahrscheinlichkeit, dass Marianne diese Marke wählt	Wahrscheinlichkeit, dass die Marke innerhalb eines Jahres defekt ist
A	0,4	0,05
B	0,5	0,02
C	0,1	0,01

Wenn die gekaufte Festplatte tatsächlich innerhalb des ersten Jahres defekt ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um Marke A handelt?

Übung 2.39 Fuzzy-Mengen

Entwickeln Sie Fuzzy-Mengen für die Begriffe:

- hoher Umsatz,

- wenig Mitarbeiter,
- hoher Altersdurchschnitt.

Übung 2.40 Fuzzy-Mengen

Finden Sie stückweise lineare Funktionen für die Fuzzy-Mengen:

- schwer,
- ungefähr 10 Stück.

Geben Sie die Repräsentation der stückweise linearen Funktionen an.

Übung 2.41 t-Norm / t-CoNorm

Überprüfen Sie, ob die angegebenen Beispiele für t-Normen und t-CoNormen die für den Durchschnitt und die Vereinigung geforderten Eigenschaften erfüllen.

Übung 2.42 Fuzzy-Mengen

Berechnen Sie für die Fuzzy-Mengen *groß* und *klein* den Durchschnitt und die Vereinigung. Verwenden Sie alle 3 angegebenen t-(Co)Normen.

Übung 2.43 Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen

Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen, wobei stückweise lineare Funktionen als Zugehörigkeitsfunktionen vorausgesetzt werden.

Übung 2.44 Fuzzy-Regler

Entwickeln Sie Fuzzy-Mengen für die fehlenden Kategorien für den Ausschlagswinkel und die Winkelgeschwindigkeit. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge in der Regeltabelle. Wie verhält sich der Fuzzy-Regler, wenn der Winkel $20°$ beträgt und die Winkelgeschwindigkeit $-10°/s$ ist?

Übung 2.45 Vage Aussagen

Finden Sie weitere Beispiele für unsichere und unscharfe Aussagen. Begründen Sie, warum es sich um unscharfe oder unsichere Aussagen handelt.

Übung 2.46 Fuzzy-Regler

Fuzzy-Regler in der Praxis: Geben Sie einen Überblick über Einsatzgebiete von Fuzzy-Reglern und stellen Sie Anwendungen zusammen.

Übung 2.47 Unvollständiges Wissen

Geben Sie einen Überblick über Konzepte zur Verarbeitung von unvollständigem Wissen.

3 Problemlösung mittels Suche

Viele praktische Probleme lassen sich auf Suche zurückführen. Aufgaben wie die Tourenplanung, generell die Planung von Ressourcen, können mittels Suche gelöst werden. Viele Zuordnungsprobleme lassen sich durch Suchverfahren lösen. Auch Diagnoseprobleme lassen sich auf Suchprobleme abbilden.

Auch in den KI-Techniken selbst finden sich Suchprobleme. In Kapitel 2 werden Logik und Regelsysteme behandelt. Sowohl beim Finden eines Beweises als auch bei der Verarbeitung von Regeln hat man es mit *Suche* zu tun.

In diesem Kapitel werden verschiedene Verfahren zur Problemlösung mittels Suche vorgestellt, die alle als Suche in einem Graphen arbeiten.

3.1 Suche in Graphen

Beispiel 3.1 Containerlager

In einem Containerlager werden Container umgestapelt. Dafür stehen drei Stellplätze zur Verfügung. Die Container A und B sollen vom linken auf den rechten Stellplatz transportiert werden, wobei der mittlere benutzt werden kann. Die Container können immer nur einzeln transportiert werden.

Wie kann ein Agent, beispielsweise eine automatische Containerbrücke, das Problem lösen?

Es gibt mehrere Aktionen, die ausgeführt werden könnten. Im ersten Schritt kann der Container A auf den mittleren oder den rechten Platz gesetzt werden. Im zweiten Schritt lässt sich der Container B auf A legen oder B auf den freien Platz verschieben oder auch A zurück auf B stellen. Bild 3.1 auf der nächsten Seite enthält einen Ausschnitt der Möglichkeiten.

Wie findet man eine Folge von Aktionen, die zum Ziel führt? Bei zwei Containern ist das noch kein Problem: Man legt den Container A auf den mittleren Platz, transportiert dann B zum Zielplatz und platziert A danach auf B.

Das Beispiel ist bewusst einfach gewählt. Ziel ist es, Software zu entwickeln, die uns die Lösung des Problems abnimmt. Aus dem Zwei-Container-Beispiel lässt sich sofort ein reales Problem

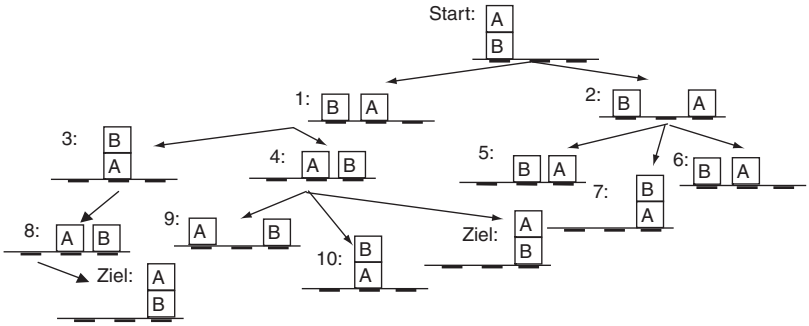


Bild 3.1 Container-Problem – Ausschnitt

entwickeln. Wie geht man vor, wenn nicht nur zwei Container übereinander gestapelt sind, sondern 10 oder mehr?

Eine mögliche Lösung ist das systematische Durchprobieren aller Möglichkeiten. Man startet beim Startzustand und untersucht, welche Aktionen möglich sind. Von den so erreichbaren Zuständen sucht man weiter, bis der Zielzustand erreicht wird.

Es gibt zahlreiche Probleme, deren Lösung man nicht durch ein zielgerichtetes, deterministisches Vorgehen findet. Man kennt den Weg zu einer Lösung nicht und versucht demzufolge, durch Probieren und Verwerfen eine Lösung zu finden. Allerdings müssen Aktionen oder Schritte bekannt sein, die zum Ziel führen könnten.

Für die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier natürlicher Zahlen ist ein Algorithmus bekannt. Hätte man diesen nicht, könnte man aber durch sukzessives Ausprobieren aller Zahlen – beginnend bei 1 – die Lösung finden.

Häufig lassen sich Probleme, für die kein Lösungsalgorithmus bekannt ist, als **Suchproblem** wie im Containerbeispiel darstellen.

Wodurch ist das Containerproblem ausgezeichnet?

1. Es gibt einen definierten **Ausgangszustand**.
2. Der gewünschte **Zielzustand** ist vorgegeben.
3. Die möglichen **Aktionen** zum Übergang von einem Zustand zum nächsten sind bekannt.

Betrachtet man die Zustände als Knoten und die Aktionen als Kanten zwischen diesen Knoten, respektive Zuständen, so kann das Problem als ein Suchproblem in einem gerichteten Graphen angesehen werden. Die Wurzel des Graphen ist der Ausgangszustand, die Kanten sind die Zustandsübergänge.

Definition 3.1 Graph

Ein Graph besteht aus einer Menge N von Knoten und einer Menge E von Kanten: $G = (N, E)$, dabei besteht E aus Paaren von Knoten: $E \subseteq N \times N$.

Nun können wir formal ein Suchproblem auf die Suche in einem Graphen zurückführen.

Definition 3.2 Suchproblem

Ein Suchproblem $S = (z_1, N, E, ziel)$ ist definiert durch:

- Sei (N, E) ein Graph.
- $z_1 \in N$
- $ziel: N \rightarrow \{W, F\}$

Gesucht ist eine Folge von Knoten $k_0, k_1, \ldots, k_n$ mit den Eigenschaften:

1. $z_1 = k_0$
2. $(k_i, k_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, n-1$
3. $ziel(k_n) = W$

Ein Suchproblem besteht darin, einen Weg von einem Startzustand z_1 zu einem Zielzustand zu finden. Die boolesche Funktion *ziel* überprüft das Erreichen eines Zielzustandes. Die möglichen Zustandsübergänge sind durch den Graphen (N, E) vorgegeben.

Folgen von Zustandsübergängen lassen sich als Listen von Zuständen darstellen. Ein Zustand kann dabei durchaus selbst als eine Liste modelliert werden. Für das Containerbeispiel sieht dann eine Zustandsfolge vom Start- zum Zielzustand wie folgt aus:

$[[A, B], [\,], [\,]] \rightarrow [[B], [A], [\,]] \rightarrow [[\,], [A], [B]] \rightarrow [[\,], [\,], [A, B]]$

Bevor auf verschiedene Suchstrategien eingegangen wird, werden zunächst zwei Kriterien für das Suchen betrachtet.

Im Allgemeinen ist es nicht sinnvoll, mehrmals durch denselben Zustand zu laufen. Zur Motivation wird Beispiel 3.2 betrachtet.

Beispiel 3.2 Wassergefäße

Wir sind im Urlaub auf einem Campingplatz an der Ostsee. Heute sind wir mit der Zubereitung der Vorsuppe dran. Doch bereits beim Abmessen des Wassers gibt es das erste Problem. Laut Beschreibung benötigen wir exakt 2 Liter. Wir haben aber nur 2 kleine Kanister, einer fasst 3 Liter, der andere 4 Liter. Beide haben keine Skalen. Können wir trotzdem exakt 2 Liter bekommen?

Dieses Problem können wir durch Suchen lösen.

Der **Ausgangszustand**: Beide Gefäße sind leer.

Der **Zielzustand**: In mindestens einem Gefäß sind exakt 2 Liter.

Es gibt nur drei mögliche **Aktionen**, die man ausführen kann:

1. Auffüllen eines Gefäßes
2. Ausschütten eines Gefäßes
3. Umfüllen des Inhaltes eines Gefäßes in das andere

In Bild 3.2 ist ein Ausschnitt aus den sich ergebenden Möglichkeiten dargestellt.

Der aktuelle Zustand wird durch ein Paar von Zahlen beschrieben, und zwar durch die in den Kanistern enthaltene Menge Wasser. [3,0] bedeutet, dass im 4-Liter-Gefäß 3 Liter, im 3-Liter-Gefäß 0 Liter enthalten sind.

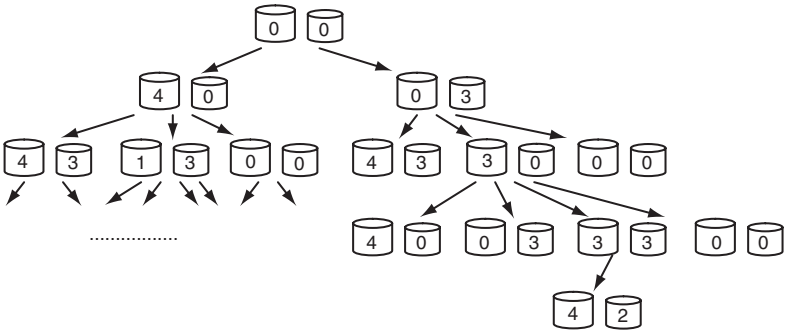


Bild 3.2 Wasserproblem

Es fällt auf, dass Zustände mehrfach vorkommen, beispielsweise [0,0] oder [4,3]. Eine sinnvolle alternative Darstellung zeigt Bild 3.3.

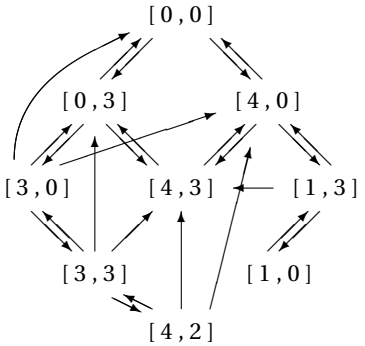


Bild 3.3 Suchraum des Wasserproblems (Ausschnitt)

Die Kante von [0,0] zu [0,3] ist durch einen Doppelpfeil gekennzeichnet, da man sowohl von [0,0] nach [0,3] durch Auffüllen des 3-Liter-Gefäßes als auch von [0,3] nach [0,0] durch Ausschütten des 3-Liter-Gefäßes gelangt. Dagegen wird vom Zustand [4,2] aus der Zustand [4,3] durch Auffüllen des 3-Liter-Gefäßes erreicht, umgekehrt gelingt das jedoch nicht.

Ist es in diesem Beispiel sinnvoll, mehrmals durch den Zustand [0,3] zu laufen? Dies kann durch diese Aktionsfolge passieren:

$$[0,0] \rightarrow [0,3] \rightarrow [4,3] \rightarrow [4,0] \rightarrow [1,3] \rightarrow [1,0] \rightarrow [0,1] \rightarrow [0,3]$$

Man sieht sofort, dass dies nicht sinnvoll ist. Angenommen, es gibt einen Weg zu einer Lösung, der über die obige Zustandsfolge führt:

$$[0,0] \rightarrow \mathbf{[0,3]} \rightarrow \mathbf{[4,3]} \rightarrow \mathbf{[4,0]} \rightarrow \mathbf{[1,3]} \rightarrow \mathbf{[1,0]} \rightarrow \mathbf{[0,1]} \rightarrow [0,3]\ldots \rightarrow \ldots[4,2]$$

Dann wird diese Lösung auch auf direktem Weg über [0,3] gefunden. Das doppelte Durchlaufen des Zustands [0,3] ist nicht erforderlich.

Frage: Kennen Sie Beispiele, wo es durchaus sinnvoll ist, das zweimalige Durchlaufen des gleichen Zustands zuzulassen?

Neben der Beobachtung, dass das mehrmalige Durchlaufen eines Zustands nicht erforderlich ist, gibt es ein zweites Kriterium. Dieses ergibt sich aus der naheliegenden Forderung, dass das Suchverfahren eine Lösung, falls sie existiert, auch nach endlicher Zeit finden sollte. Dies ist nicht ohne weiteres sicher. Betrachtet man das Wasserbeispiel und vernachlässigt die Forderung nach dem nur einmaligen Durchlaufen eines Zustands, so kann ein einfaches Suchverfahren in einen unendlichen Zyklus geraten, in dem es ständig zwischen den Zuständen [0,3] und [0,0] durch Ausschütten und Auffüllen wechselt.

Der Suchraum muss im Allgemeinen komplett durchsucht werden. Wird in einem Suchraum jeder mögliche Zustandsübergang untersucht, so bezeichnet man dies als **vollständige Suche**.

Es gibt eine Vielzahl von praktischen Problemen, die mittels Suche gelöst werden können. Auch viele Spiele passen in dieses Schema.

Schach ist ein im Prinzip sehr einfaches Spiel: Es gibt eine definierte Ausgangssituation, klare Regeln und ein genau beschreibbares Ziel. Schach ist ein Problem, welches durch einen **Zustandsraum** beschrieben werden kann:

- Ausgangszustand,
- Zielzustände (gegnerischer König im Matt, eigener König nicht bedroht),
- wohldefinierte Zustandsübergänge (Aktionen).

Der Zustandsraum ist auch hier ein Graph. Die Knoten repräsentieren die Schachstellungen, die Kanten sind die möglichen Züge. Da ein Zustandsübergang auch das Schlagen einer Figur sein kann, ist der Zustandsübergang nicht immer umkehrbar. Das Schachspiel lässt sich folglich durch einen gerichteten Graph beschreiben.

Das Problem beim Schach ist, dass man nicht weiß, wie man sicher gewinnt. Es ist kein Algorithmus bekannt, um Schwarz sicher zu schlagen. Gäbe es einen solchen Algorithmus, würde dies bedeuten, dass Weiß in jeder Situation mindestens einen sicheren Gegenzug kennt, um zu gewinnen. Vielmehr muss man es der eigenen Intuition und Erfahrung überlassen, einen günstigen Zug auszuwählen. Aus der Vielzahl von Möglichkeiten, in einer bestimmten Situation eine Figur zu ziehen, muss ein Zug selektiert werden. Dazu überlegt man, je nach Qualität der eigenen spielerischen Fähigkeiten, wie Schwarz auf die möglichen Züge reagieren könnte, wie man selbst wiederum darauf reagieren könnte usw.

Im Prinzip kann diese Aufgabe dem Computer übertragen werden. Ziel ist es, in einer bestimmten Situation eine solche Aktion zu finden, so dass man mit Sicherheit gewinnt. Sicher gewinnen, heißt, dass uns jeder Zug von Schwarz wiederum ermöglicht, einen „Sieger“-Zug auszuführen. Dazu ist das komplette Recherchieren aller Möglichkeiten nötig. Damit hat man das Problem auf Suche reduziert, und zwar Suche in einem gerichteten Graph.

Wird der Graph ohne Zusatzinformation durchsucht, bezeichnet man dies als **uninformierte Suche**. Natürlich benutzt man gerade beim Schach Erfahrungswerte. Es ist selten sinnvoll, den eigenen König isoliert von anderen eigenen Figuren allein zu positionieren. Dies kann in der Suche verwendet und der Suchraum damit reduziert werden. Das Verwenden von solchen Zusatzinformationen führt zu einer **heuristischen** oder **informierten** Suche.

Die Komplexität des Schachspiels ist aber so groß, dass eine **vollständige Suche** – das komplette Durchsuchen des Suchraums – auch unter Einbeziehung von Informationen nicht rea-

lisiert werden kann. Man ist demzufolge gezwungen, Kompromisse zu finden. Ein möglicher Kompromiss ist neben der Bewertung von Stellungen auf dem Schachbrett die Begrenzung der Tiefe im Suchraum. Die Vorschau möglicher Züge wird auf eine bestimmte Zahl von Zügen beschränkt.

Im Folgenden werden verschiedene Suchstrategien untersucht. Im WWW findet man unter *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* sowohl entsprechende Software als auch Beispiele.

3.2 Uninformierte Suche

Uninformierte Suche wird immer dann angewendet, wenn keine Zusatzinformation über das zu lösende Problem existiert. Zunächst wird die Frage behandelt: Wie kann man die Suche prinzipiell organisieren?

Das Vorgehen wird zunächst schematisch dargestellt. Als Datenstruktur zur Darstellung aller bisher gefundenen (eventuell noch nicht vollständigen) Wege durch den Suchgraphen wählen wir die Liste. Sei

- Kand die **Liste der Kandidaten von Wegen**, die zu untersuchen sind,
- z_1 der **Ausgangszustand**,
- z und s **Zustände** (Knoten des Graphen) und
- p **Wege** durch den Zustandsraum.

Ein Weg ist dabei eine Folge von durch Kanten verbundenen Knoten.

Listing 3.1 Prinzipieller Algorithmus für Suche

```
FUNCTION SUCHE
  Kand := [z1];
  Ziel_erreicht := false;
  REPEAT
    Wähle aus Kand einen Weg :   p := z1z2...zm   aus;
    Ziel_erreicht := ziel(zm) ;
    IF NOT Ziel_erreicht  THEN
      Berechne alle Zustände, die von zm in einem Schritt erreicht
                  werden können : [s1,...,sk] ;
      Lösche p aus Kand heraus ;
      Füge die Wege z1z2...zms1, ... , z1z2...zmsk in Kand ein;
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN p;
END
```

Ein Weg $p = z_1 z_2 \ldots z_m$ enthält die Folge von Zuständen, die durch Zustandsübergänge entstehen. In $m-1$ Schritten kommt man vom Startzustand z_1 zum Zustand z_m.

Die Suche beginnt damit, dass alle Nachfolger des Startzustandes z_1, somit alle Zustände, die in einem Schritt erreicht werden können, berechnet werden: $s_1, \ldots, s_k$. Man erhält eine Menge von möglichen Wegen: $z_1 s_1, \ldots, z_1 s_k$.

Diese Vorgehen setzt sich fort: Aus der Menge `Kand` wählt man einen Weg aus und geht von dessen Endpunkt einen Schritt weiter. Ist der gewählte Weg $p = z_1 z_2 \ldots z_m$, man gelangt also in $m-1$ Schritten von z_1 über $z_2 \ldots z_{m-1}$ zu z_m, so sucht man alle Nachfolger von z_m und erweitert den Weg p entsprechend. Die logische Variable `Ziel_erreicht` enthält die Information, ob eine Lösung gefunden wurde.

Warum werden alle Zwischenzustände gespeichert? Hier gibt es zum einen ein inhaltliches Argument: Bei vielen Problemen interessiert nicht nur, ob man zu einem Zielzustand gelangt, sondern insbesondere auch wie. Ganz offensichtlich ist dies beim Wasserproblem: Die Information, dass man 2 Liter erzeugen kann, ist unnütz. Vielmehr interessiert die Folge von Aktionen, die ausgeführt werden muss, um zu 2 Litern zu gelangen.

Zum anderen wird gefordert, dass nicht mehrfach durch denselben Zustand gelaufen wird. Um dies überprüfen zu können, merken wir uns die bereits durchlaufenen Zustände.

Das obige Vorgehen bei der Suche bietet Freiheitsgrade. Dies betrifft zum einen

- das *Einfügen* der neuen Wege sowie zum anderen
- das *Auswählen* eines Kandidaten aus der aktuellen Kandidatenliste `Kand`.

Es wird im Weiteren immer das erste Element der Liste gewählt. Dies ist keine Einschränkung, da durch entsprechendes Sortieren der Liste der gewünschte Kandidat an die erste Stelle gesetzt werden kann. Somit verbleiben die Freiheitsgrade beim Einfügen der neuen Kandidaten sowie beim **Sortieren der Kandidatenliste**.

Fügt man die neuen Wege an den Anfang der Liste der Kandidaten ein, so wird immer mit den neuen Kandidaten weitergearbeitet, sprich weitergesucht. Scheitert die Suche mit diesen, wird sukzessive auf die älteren Kandidaten zurückgegriffen. Die älteren Kandidaten werden zurückgestellt und erst dann bearbeitet, wenn der aktuelle Kandidat und die daraus entstandenen Wege komplett untersucht wurden. Man arbeitet immer mit einem der *neuen* Knoten weiter, geht also im Suchgraphen immer eine Ebene tiefer. In der Darstellung als Graph äußert sich dieses Vorgehen in einem sich ständig verlängernden Weg vom Startknoten zu einem aktuellen Knoten. Die Suche geht also zunächst in die Tiefe, weshalb dieses Verfahren als **Tiefensuche** (Tiefe-zuerst-Suche, depth first) bezeichnet wird. Mit Tiefensuche wird beim Wasserproblem (Bild 3.4) die Suche immer im aktuellen Teilgraphen fortgesetzt.

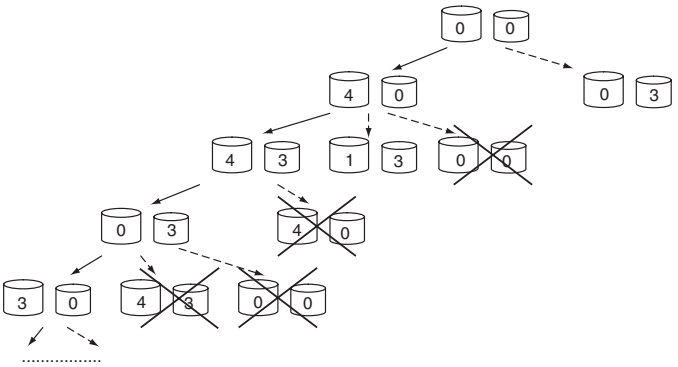


Bild 3.4 Wasserproblem – Tiefensuche

Sucht man im Teilgraphen unterhalb von [4,0], so wird dieser erst dann wieder verlassen, wenn dieser Teilgraph komplett durchsucht ist. Der Weg [[0,0], [4,0], [1,3]] wird erst dann bearbeitet, wenn alle Wege, die über [[0,0], [4,0], [4,3]] führen, untersucht wurden.

In Bild 3.4 sind die Zustandsübergänge gestrichen, die aufgrund der Restriktion, dass Zustände nicht zweimal durchlaufen werden dürfen, entfallen.

Fügt man die neuen Wege dagegen nicht am Anfang, sondern am Ende der Liste `Kand` ein, so werden zunächst ältere Kandidaten bearbeitet, bevor die neueren abgearbeitet werden. Dies bezeichnet man als **Breitensuche** (Breite-zuerst-Suche, breadth first). Jede Ebene im Suchgraphen wird komplett durchsucht, danach wird auf die nächste Ebene übergegangen.

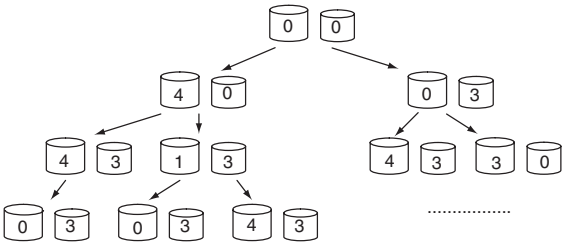


Bild 3.5 Wasserproblem – Breitensuche

Breitensuche verhält sich wie in Bild 3.5 dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier bereits auf die doppelt durchlaufenen Zustände verzichtet. Durchsucht werden die möglichen Wege in dieser Reihenfolge:

1. $[0,0]$
2. $[0,0] \rightarrow [4,0]$
3. $[0,0] \rightarrow [0,3]$
4. $[0,0] \rightarrow [4,0] \rightarrow [4,3]$
5. $[0,0] \rightarrow [4,0] \rightarrow [1,3]$
6. $[0,0] \rightarrow [0,3] \rightarrow [4,3]$
7. $[0,0] \rightarrow [0,3] \rightarrow [3,0]$

Breitensuche durchsucht den Suchraum ebenenweise.

Die schematische Darstellung des Suchalgorithmus kann nun sowohl auf Breitensuche als auch auf Tiefensuche angepasst werden, vgl. Listing 3.2.

Listing 3.2 Algorithmus – Breitensuche

```
FUNCTION BREITENSUCHE
  Kand := [z1];
  Ziel_erreicht := false;
  REPEAT
    Sei Kand = [z1z2...zm,  p2,p3,...,pn] ;
    p := z1z2...zm ;
    Ziel_erreicht := ziel(zm) ;
    IF NOT Ziel_erreicht THEN
      Berechne alle Zustände, die von zm in einem Schritt
               erreicht werden können : [s1,...,sk] ;
```

```
      Kand := [p2, p3,..., pn, z1z2...zms1, ... , z1z2...zmsk ];
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN p;
END
```

Tiefensuche unterscheidet sich von der Breitensuche nur bezüglich der Einordnung der neuen Kandidaten (Listing 3.3).

Listing 3.3 Algorithmus – Tiefensuche

```
FUNCTION TIEFENSUCHE
  Kand := [z1];
  Ziel_erreicht := false;
  REPEAT
    Sei Kand = [z1z2...zm,  p2,p3,...,pn] ;
    p := z1z2...zm ;
    Ziel_erreicht := ziel(zm) ;
    IF NOT Ziel_erreicht THEN
      Berechne alle Zustände, die von zm in einem Schritt
               erreicht werden können : [s1,...,sk] ;
      Kand := [z1z2...zms1, ... , z1z2...zmsk,  p2, p3, ... , pn ];
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN p;
END
```

Am Beispiel des in Bild 3.6 dargestellten abstrakten Suchraums werden beide Verfahren veranschaulicht. Der Ausgangszustand sei *a*.

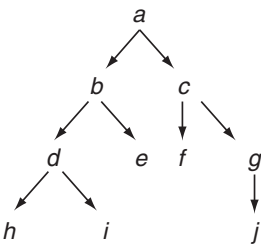


Bild 3.6 Suchraum-Beispiel

Um darzustellen, wann der jeweilige Knoten im Suchraum durch die Suchverfahren durchlaufen wird, sind im Bild 3.7 auf der nächsten Seite die Knotenbezeichnungen durch Nummern ersetzt. Die Nummern geben die Reihenfolge an, in welcher die Knoten bearbeitet werden.

Ist der Zustand *h* der gesuchte Zielzustand, so ist Tiefensuche günstig, da bereits nach vier Schritten das Ziel erreicht wird. Breitensuche durchsucht erst die Ebenen 2 und 3. Ist dagegen *c* gesucht, so ist Breitensuche offensichtlich günstig.

In Tabelle 3.1 auf der nächsten Seite sind die Reihenfolgen angegeben, in denen Breiten- und Tiefensuche die Lösungskandidaten erzeugen. Der einzige Zielzustand sei *g*.

Eine mögliche Implementierung der Breiten- und Tiefensuche wird in der Programmiersprache PROLOG beschrieben:

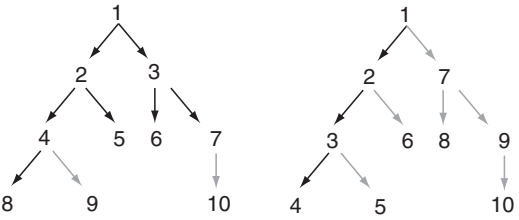


Bild 3.7 Breiten- und Tiefensuche

Tabelle 3.1 Breiten- und Tiefensuche

Breitensuche	Tiefensuche
a	***a***
$a-$***b***	$a-$***b***
$a-$***c***	$a-b-$***d***
$a-b-$***d***	$a-b-d-$***h***
$a-b-$***e***	$a-b-d-$***i***
$a-c-$***f***	$a-b-$***e***
$a-c-$***g***	$a-$***c***
	$a-c-$***f***
	$a-c-$***g***

Zunächst benötigt man eine Hauptregel, die die Suche vorbereitet und startet:

```
suche(Loesung) :-
   startzustand(Start),
   generiere_weg(Start, StartWeg),
   generiere_kandidaten_menge(StartWeg, Kandidaten),
   finde(Kandidaten, Loesung).
```

Die Suche erfolgt durch Verwaltung einer Kandidatenmenge, in der alle derzeit bekannten Kandidaten aufgesammelt werden. In der obigen Regel wird zunächst der Startzustand erfragt. Aus diesem wird ein Weg, der nur aus diesem einen Zustand besteht, erzeugt. Anschließend wird die Kandidatenmenge, die nur aus dem gerade erzeugten Weg besteht, generiert. Dann wird die Suche gestartet.

Die Regeln für die eigentliche Suche sehen wie folgt aus.

Genügt der als nächstes zu bearbeitende Kandidat dem Zielkriterium, hat man eine Lösung gefunden.

```
finde(Kandidaten, Kandidat) :-
   aktueller_kandidat(Kandidaten, Kandidat, _),
   ziel_erreicht(Kandidat).
```

Wurde kein Ziel gefunden, wird zunächst aus der Kandidatenmenge ein Weg ausgewählt (`Kandidat`) und gleichzeitig die Menge der restlichen Kandidaten berechnet. Dieser Kandidat wird dann expandiert. Mit Expandieren wird das Berechnen der Nachfolger – der Zustände, die in einem Schritt erreichbar sind – bezeichnet. Ist in unserem Beispiel der aktuelle Kandidat $a-b-d$, so wird die Menge der Nachfolger $[a-b-d-h, a-b-d-i]$ berechnet.

```
finde(Kandidaten, Loesung) :-
   aktueller_kandidat(Kandidaten, Kandidat, Restkandidaten),
   not(ziel_erreicht(Kandidat)),
   expandiere_weg(Kandidat, Kandidaten, Nachfolger),
   kombiniere(Restkandidaten, Nachfolger, NeueKandidaten),
   finde(NeueKandidaten, Loesung).
```

Anschließend werden die alten und neuen Kandidaten zusammengefügt. Der aktuell bearbeitete Kandidat wird aus der Kandidatenmenge entfernt.

Das Expandieren des aktuellen Kandidaten geschieht wie folgt:

```
expandiere_weg(Kandidat, AlleKandidaten, Nachfolger) :-
   knoten(Kandidat, Knoten, _),
   nachfolger(Knoten, Succ),
   erweitere(Succ, Kandidat, Expand1),
   pruefe_doppelte_knoten(Expand1, Expand2),
   bereinige(Expand2, AlleKandidaten, Nachfolger), !.
```

Zunächst wird aus dem aktuellen Weg (beispielsweise $a-b-d$) der aktuelle Zustand berechnet, an welchem die Suche fortgesetzt wird (d). Anschließend werden alle dessen Nachfolger berechnet (Succ: $[h,i]$). Dann wird $a-b-d$ um jeweils h bzw. i erweitert, und es entsteht $[a-b-d-h,\ a-b-d-i]$ (`Expand1`). Diese beiden neuen Wege werden nun daraufhin untersucht, ob sie doppelte Knoten enthalten. Wege, die zweimal den gleichen Zustand durchlaufen, werden gelöscht. Zum Schluss wird noch kontrolliert, ob die neuen Wege bereits als Kandidaten existieren.

Es ist offensichtlich, dass man den Test, ob eine Lösung erreicht wurde, bereits in `erweitere/3` durchführen kann. Zur Vereinfachung ist dies als separate Regel für `finde/2` formuliert. Der Test, ob ein Ziel erreicht ist, wird erst dann durchgeführt, wenn die Lösung als nächster Kandidat ausgewählt wird.

Es sei darauf hingewiesen, dass entsprechend der obigen Vereinbarung immer das erste Element der Kandidatenliste als aktueller Weg selektiert wird.

```
aktueller_kandidat([Kandidat|Rest],Kandidat,Rest).
```

Die Entscheidung, ob Tiefen- oder Breitensuche erfolgt, liegt somit allein in den Regeln für `kombiniere/3`:

```
kombiniere(K, Nachfolger, Kneu) :-
   typ(breite),
   append(K, Nachfolger, Kneu).
kombiniere(K, Nachfolger, Kneu) :-
   typ(tiefe),
   append(Nachfolger, K, Kneu).
```

Das Zusammenfügen zweier Listen ist als `append/3` in den PROLOG-Systemen vordefiniert.

Man benutzt für die Verwaltung der möglichen Wege bei der **Tiefensuche** einen **Keller**, bei der **Breitensuche** eine **Schlange**.

Voraussetzung für obiges Vorgehen ist, dass diese Informationen existieren:

- `startzustand(<zustand>) :- ...` legt den Startzustand fest
- `ziel_erreicht(<kandidat>) :- ...` überprüft, ob ein Zielzustand erreicht ist
- `nachfolger(<zustand>, <nachfolger>) :- ...` berechnet die Nachfolger von `<zustand>`

Für das 2-Liter-Problem sehen diese Prädikate wie folgt aus.

Im Startzustand sind beide Gefäße leer:

```
startzustand([0,0]).
```

Der Zielzustand ist dadurch gekennzeichnet, dass in mindestens einem Gefäß 2 Liter enthalten sind. Für die Darstellung eines Weges wird die Datenstruktur *Liste* gewählt wird. Ein Weg wird dabei in umgekehrter Reihenfolge in der Liste gespeichert, der Weg $[0,0] \rightarrow [4,0] \rightarrow [4,3]$ wird folglich als `[[4,3], [4,0], [0,0]]` dargestellt. Dies ist dadurch begründet, dass der Zugriff auf das erste Element einer Liste einfach ist. Auf das letzte Element einer Liste kann dagegen erst nach „Durchlaufen“ der gesamten Liste zugegriffen werden.

```
ziel_erreicht([ A | _ ]) :- ziel(A).
ziel([ 2 , _ ]).
ziel([ _ , 2 ]).
```

Bei der Berechnung der Nachfolger wird das PROLOG-Prädikat `setof/3` verwendet. Dieses liefert die Menge aller Lösungen für eine Anfrage zurück. Die einzelnen Zustandsübergänge sind durch das Hilfsprädikat `zustandsuebergang/2` definiert.

```
nachfolger(A, Liste) :- setof(X, zustandsuebergang(A,X), Liste), !.
nachfolger(A, [ ] ).
```

Die drei möglichen Aktionen können durch Regeln beschrieben werden:

1. *Auffüllen eines Gefäßes.* Das aufzufüllende Gefäß darf nicht bereits voll sein.

   ```
   zustandsuebergang([L4, L3], [L4, 3]) :- L3 \== 3.
   zustandsuebergang([L4, L3], [4, L3]) :- L4 \== 4.
   ```

2. *Leeren eines Gefäßes.* Das zu leerende Gefäß darf nicht bereits leer sein.

   ```
   zustandsuebergang([L4, L3], [L4, 0]) :- L3 \== 0.
   zustandsuebergang([L4, L3], [0, L3]) :- L4 \== 0.
   ```

3. *Umfüllen der Gefäße.* Beim Umfüllen der Gefäße sind vier Fälle zu betrachten:

   (a) *Umfüllen vom 3- in das 4-Liter-Gefäß.* Die gesamte Menge passt in das 4-Liter-Gefäß.

   ```
   zustandsuebergang([L4,L3], [L4neu,0]) :- L3\==0, L3 + L4 =< 4, L4neu is L3 + L4.
   ```

   (b) *Umfüllen vom 4- in das 3-Liter-Gefäß.* Die gesamte Menge passt in das 3-Liter-Gefäß.

   ```
   zustandsuebergang([L4,L3], [0,L3neu]) :- L4\==0, L3 + L4 =< 3, L3neu is L3 + L4.
   ```

   (c) *Umfüllen vom 3- in das 4-Liter-Gefäß.* Nicht alles passt in das 4-Liter-Gefäß.

   ```
   zustandsuebergang([L4,L3], [4,L3neu]) :- L4\==4, L3+L4 > 4, L3neu is L3 + L4 - 4.
   ```

   (d) *Umfüllen vom 4- in das 3-Liter-Gefäß.* Nicht alles passt in das 3-Liter-Gefäß.

   ```
   zustandsuebergang([L4,L3], [L4neu,3]) :- L3\==3, L3+L4 > 3, L4neu is L3 + L4 - 3.
   ```

Vorteile und Nachteile der Breiten- und Tiefensuche

Zunächst werden einige Eigenschaften der vorgestellten Verfahren betrachtet. Die wichtigste Eigenschaft ist die **Vollständigkeit**.

Definition 3.3 Vollständigkeit

Ein Suchverfahren heißt **vollständig**, wenn es stets eine Lösung findet – vorausgesetzt, es existiert eine Lösung.

Tiefensuche kann unvollständig sein. Ist im Suchraum ein unendlich tiefer Ast enthalten, so läuft Tiefensuche irgendwann in diesen hinein und verlässt diesen nie wieder. Das ist eher von theoretischem Interesse, da dies bei praktischen Problemen selten ist. Ist der Suchraum endlich, ist Tiefensuche vollständig.

Breitensuche ist vollständig. Dies liegt darin begründet, dass Breitensuche den Suchraum derart durchläuft, dass jeder Knoten durch Breitensuche innerhalb endlicher Zeit erreicht wird. Dieses nennt man **Fairness** eines Suchverfahrens. Breitensuche hat somit auch keine Probleme mit unendlich tiefen Suchräumen.

Die zweite Eigenschaft, die überprüft werden muss, ist die **Korrektheit**.

Definition 3.4 Korrektheit

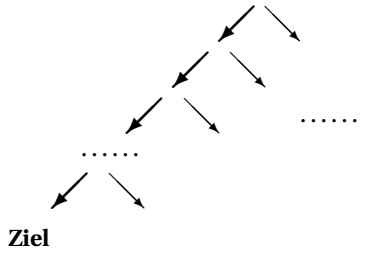
Ein Suchverfahren heißt korrekt, wenn ein vom Suchverfahren vorgeschlagener Weg tatsächlich eine Lösung ist.

Da das Überprüfen, ob ein Kandidat eine Lösung ist, durch das Prädikat `ziel_erreicht/1` erfolgt, hängt die Korrektheit des Verfahrens offensichtlich allein von der korrekten Implementierung dieser Regel ab. Die Korrektheit ist demzufolge unabhängig vom eigentlichen Suchverfahren.

Im Allgemeinen haben Probleme mehrere Lösungen. Die Frage nach der Qualität einer Lösung ist somit durchaus sinnvoll. Eine mögliche Definition der Qualität kann über die Zahl der benötigten Schritte erfolgen. Beim Wasserproblem ist dies die Anzahl der Aktionen (Auffüllen, Umfüllen, Auskippen) oder die Anzahl der vergeudeten Liter. Legt man dieses Kriterium zur Beurteilung der beiden Verfahren an, so stellt man fest, dass Breitensuche immer die kürzeste Lösung liefert, da der Suchraum Ebene für Ebene durchsucht wird. In dieser Hinsicht ist Breitensuche von Vorteil.

Tiefensuche kann allerdings eine Lösung sehr schnell finden. Ist im Suchraum „links“ in der n-ten Ebene ein Zielzustand, so findet Tiefensuche diesen sehr schnell (Bild 3.8).

Breitensuche dagegen würde erst alle darüber liegenden $n-1$ Ebenen durchlaufen. Liegt die Lösung im rechten Teil des Suchraums, so findet Breitensuche diese schneller als Tiefensuche.



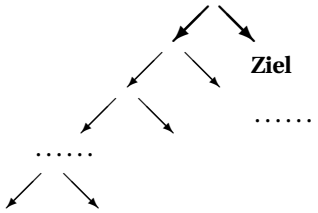


Bild 3.8 Tiefensuche – günstiger Suchraum Breitensuche – günstiger Suchraum

Komplexität von Breiten- und Tiefensuche

Wie hoch ist der Platz- und Zeitbedarf beider Verfahren?

Zunächst wird eine **Worst-Case-Analyse** durchgeführt. Wir betrachten dazu den denkbar ungünstigsten Fall. Als Suchraum wird ein gerichteter Baum mit der Tiefe T sowie einer Verzweigungsrate V – jeder Knoten hat V Nachfolger – angenommen. Weiterhin liegen alle Zielknoten auf der untersten Ebene, also in der Ebene T (Bild 3.9). Dies ist natürlich idealisiert, gibt aber einen Einblick in die Komplexität beider Verfahren.

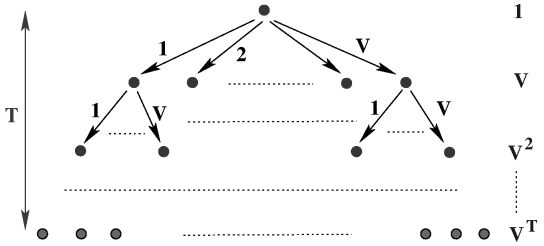


Bild 3.9 Suchraum – Komplexität

Der gesamte Baum hat somit in der i-ten Ebene V^i Knoten. Insgesamt enthält der Baum

$$1 + V + V^2 + \ldots + V^T$$

Knoten. Das liegt in der Größenordnung von V^T (man schreibt dafür $O(V^T)$).

Die Schreibweise $O(V^T)$ bedeutet im obigen Fall, dass ein k und ein V_0 existieren, so dass für alle $V \geq V_0$ gilt:

$$1 + V + V^2 + \ldots + V^T < k \cdot V^T$$

Im ungünstigsten Fall sind beide Verfahren gleich. Für beide Verfahren ist der ungünstigste Fall der, dass der gesuchte Zielzustand in der untersten Ebene „ganz rechts“ liegt. Hier benötigen beide Verfahren die gleiche Anzahl von Schritten: $O(V^T)$ (Bild 3.10 auf der nächsten Seite).

Die Worst-Case-Analyse zeigt also keinen Unterschied. Betrachtet man dagegen einen durchschnittlichen Suchbaum mit obigen Annahmen, so stellt man fest, dass Tiefensuche hier von Vorteil ist. Breitensuche benötigt wieder $O(V^T)$ Schritte, da alle Ebenen oberhalb der untersten Ebene expandiert werden müssen. Tiefensuche erfordert im günstigsten Fall nur T Schritte. Im Durchschnitt muss Tiefensuche nur den halben Suchraum durchsuchen. Der Aufwand ist natürlich auch $O(V^T)$, nur ist Tiefensuche im Vergleich zur Breitensuche besser.

Betrachtet man den Speicherbedarf, so stellt man fest, dass er durch die Größe der Liste der möglichen Wege (*Kandidatenliste*) bestimmt wird. Unter obigen Annahmen ist der schlech-

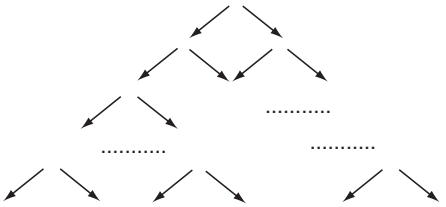


Bild 3.10 Schlechtester Fall für Tiefen- und Breitensuche (V = 2)

teste Fall bei Breitensuche dadurch gegeben, dass die komplette Ebene T bereits als Kandidaten vorliegt. Dann hat man insgesamt $O(V^T)$ Kandidaten gespeichert. Der schlechteste Fall bei der Tiefensuche ist dadurch gegeben, dass man den ersten Knoten in der Ebene T erreicht hat. Für alle seiner darüber liegenden Knoten (insgesamt T) müssen die anderen Nachfolger gespeichert werden (jeweils $V-1$), das ergibt einen Gesamtspeicherbedarf von $T \cdot (V-1)$.

Tiefensuche hat somit bezüglich der Komplexität gegenüber Breitensuche Vorteile, insbesondere bezüglich des Speicherbedarfs.

Die hier durchgeführte Analyse ist nur unter der Annahme eines idealisierten Suchraums erfolgt. In der Praxis sind solche Bedingungen selten gegeben.

Gibt es ein Verfahren, welches die Vorteile der Tiefensuche (Komplexität) mit den Vorteilen der Breitensuche (Fairness, Vollständigkeit) verbindet? Die Idee für ein solches Verfahren ist, dass man Tiefensuche durchführt, dabei aber die Tiefe der Kandidaten beschränkt. Man erlaubt nur das Expandieren von Kandidaten bis zu einer bestimmten Tiefe. Findet man dabei keine Lösung, lockert man die Tiefenbeschränkung, man erlaubt tiefere Suche. Dieses Suchverfahren heißt **schrittweise Vertiefung (Iterative Deepening)**. Bezüglich der Komplexität lässt sich vermuten, dass der Zeitbedarf enorm wächst, da mit jeder neuen Tiefenbeschränkung Tiefensuche wieder völlig neu gestartet wird. Dieses Verfahren hat allerdings ein zeitliches Verhalten wie Breitensuche ($O(V^T)$). Bezüglich des Speicherplatzbedarfs verhält es sich wie Tiefensuche.

3.3 Heuristische Suche

Tiefen- und Breitensuche scheitern häufig bei größeren Suchproblemen. Dies ist aufgrund der Komplexitätsuntersuchungen im vorherigen Abschnitt 3.2 nicht überraschend.

Beispiel 3.3 Rundreiseproblem

Ein Reisender soll eine feste Anzahl von Städten besuchen, und zwar jede genau einmal. Nachdem alle Orte angefahren wurden, soll zur Ausgangsstadt zurückgekehrt werden. Gesucht ist der kürzeste Reiseweg.

Man bezeichnet das Rundreiseproblem auch als **Problem des Handelsreisenden** oder **Travelling Salesman Problem**.

Die Lösung erscheint zunächst relativ einfach: Man probiere alle möglichen Routen aus und bestimme die kürzeste.

Wie viele Möglichkeiten, n Städte anzuordnen, gibt es? Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass dies ein Permutationsproblem ist, somit $n!$ Möglichkeiten existieren. Die Zahl der möglichen Wege steigt also exponentiell mit der Zahl der zu besuchenden Städte.

Das Problem ist NP-vollständig. Es ist derzeit also kein Algorithmus bekannt, der dieses Problem „effizient“ löst. Mit dem Begriff „effizient“ ist gemeint, dass der Algorithmus zumindest einen nicht exponentiellen Aufwand hat, also polynomiell arbeitet.

Zur Veranschaulichung haben wir mittels eines Python-Programms (auf einem herkömmlichen Laptop) folgende Zeiten für die vollständige Suche ermittelt. Dabei wird berücksichtigt, dass bei der Verwendung der ersten genannten Stadt als Ausgangsort nur noch $(n-1)!$ Routen zu untersuchen sind.

Wir haben die Zeiten, die wir mit einem Pascal-Programm für die 1. Auflage unseres Buchs 2002 durchgeführt haben, zum Vergleich angegeben.

Die mit einem Stern gekennzeichneten Zeiten wurden nicht gemessen, sondern extrapoliert: $t(n) = t(n-1) \cdot (n-1)$.

Tabelle 3.2 Aufwand zur Lösung des Rundreiseproblems

Anzahl	$(n-1)!$	Zeit $t(n)$ (Pascal)	Zeit $t(n)$ (Python)
6	120	< 1 sec	0,0 sec
7	720	1 sec	0,0156 sec
8	5040	7 sec	0,03 sec
9	40320	1 min	0,1875 sec
10	362880	9 min	1.55 sec
11	3628800	90 min*	15.33 sec
12	39916800	16,5 h*	180,4 sec
13	479001600	8 Tage*	36 min*
14	$6{,}2 \cdot 10^9$	104 Tage*	470 min*
15	$87 \cdot 10^9$	4 Jahre*	110 h*

Das Python-Programm schlägt das Pascal-Programm deutlich. Aber auch wenn die Laufzeiten drastisch gesunken sind, wird klar, dass das Problem – auch mit dem Python-Programm – nur für relativ kleine Zahlen lösbar ist. Das exponentielle Wachstum ist auch durch schnelle Computer nicht kompensierbar.

Konkret bedeutet dies, dass die Berechnung der optimalen Rundreise durch die sechs ehemals kreisfreien Städte in Mecklenburg-Vorpommern (Bild 3.11 auf der nächsten Seite) kein Problem darstellt. Die optimale Route durch alle 12 ehemaligen Kreisstädte zu finden, ist noch realistisch. Das Finden einer optimalen Strecke durch alle 18 Kreis- und kreisfreien Städte mittels des Ausprobierens aller Möglichkeiten ist dagegen in angemessener Zeit nicht mehr möglich.

Die Konsequenz ist, dass Suchverfahren wie Breiten- oder Tiefensuche bei größeren Problemen nicht immer erfolgreich sind.

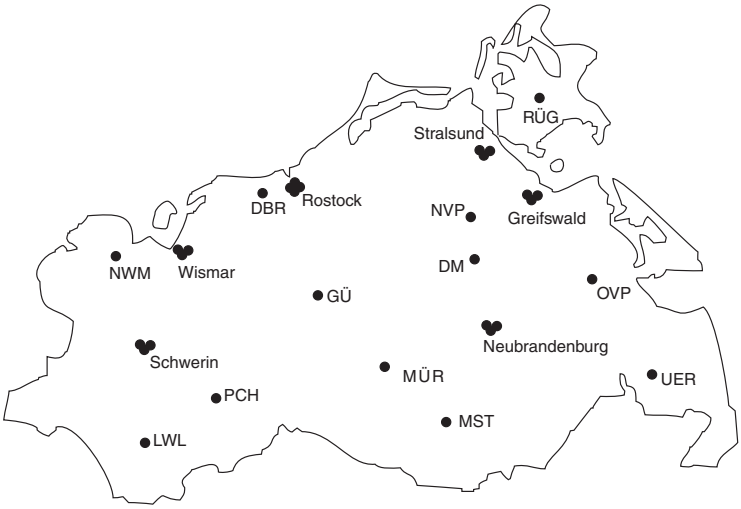


Bild 3.11 Mecklenburg-Vorpommern - ehemalige Kreise und kreisfreie Städte

Man benötigt zusätzliche Kriterien oder Heuristiken, die den Suchraum strukturieren oder eingrenzen. Das Strukturieren des Suchraums läuft im Prinzip auf eine Modifikation der Reihenfolge der Abarbeitung der Kandidaten hinaus. Grenzt man den Suchraum ein, so bedeutet dies, dass Zweige im Suchraum abgeschnitten werden.

Bei vielen Problemen liegen **Zusatzinformationen** wie Entfernungen, Kosten, Materialverbrauch vor. Diese Informationen werden bei der Breiten- und Tiefensuche jedoch nicht benutzt.

Gesucht ist im Rundreise-Beispiel die *kürzeste* Strecke. Demzufolge sollte man bei der Suche die Information über die Streckenlänge benutzen. Eine einfache Variante ist diese Strategie:

- Man führt Tiefensuche durch und merkt sich die beste bisher gefundene Lösung. Ergibt sich nun ein Weg, der bereits länger als der bisher beste Weg ist, so muss man diesen Kandidaten nicht weiter untersuchen, da er ohnehin schon schlechter als die bisher beste Lösung ist.

Beispiel 3.4 Schach

Beim Schach werden zur Auswahl eines „guten“ Zuges Informationen anderer Art benutzt. Hier steht nicht im Fokus, die bisherigen Züge bezüglich ihres Aufwandes zu messen, sondern die Qualität der eigenen Stellung ist gefragt. Das Augenmerk liegt auf einer geschätzten Entfernung zum Schachmatt für den Gegner.

Allerdings ist dies beim Schach äußerst schwierig, da die Bewertung einer Stellung eine Vielzahl von Komponenten enthält.

Im Folgenden werden Suchverfahren diskutiert, die Zusatzinformationen über Probleme benutzen. Man bezeichnet dies als **informierte Suche** oder als **heuristische Suche**.

Heuristiken dienen zum einen der Strukturierung des Suchraums. Man wählt den nächsten Kandidaten nicht zufällig, sondern nach bestimmten Kriterien aus. Welcher ist der vielversprechendste Weg?

Zum anderen kann durch Heuristiken der Suchraum verkleinert werden, indem Teile des Lösungsraums abgeschnitten werden. Eine Effizienzsteigerung wird durch Eingrenzung des Suchraums erreicht.

Wird der Suchraum strukturiert, so wird das Verfahren vollständig bleiben. Reduziert man ihn aber, so kann die Vollständigkeit verloren gehen.

Bevor auf spezielle Verfahren eingegangen wird, wird zunächst untersucht, welche Informationen in eine heuristische Funktion einfließen können.

Eine Möglichkeit besteht darin zu schätzen, wie weit man noch von einer Lösung entfernt ist. Zur Steuerung der Suche kann eine **heuristische Funktion *h*** eingesetzt werden: Je besser die h-Bewertung eines Kandidaten, desto näher liegt der Kandidat an einer Lösung. Eine Lösung sollte demzufolge die h-Bewertung 0 haben.

Die heuristische Funktion h bietet keine Garantie für eine gute Suche. Es kann nur eine **Schätzfunktion** für den noch entstehenden Aufwand sein, denn die exakte Entfernung zum Ziel ist nach wie vor nicht bekannt.

Eine zweite Möglichkeit ist, dass man den **bisherigen Aufwand** berücksichtigt. Beim Rundreiseproblem können wir die Information der Länge der Wege nutzen. Da die kürzeste Strecke gesucht wird, ist das Summieren der bisher zurückgelegten Kilometer sinnvoll. Hier wird nicht bewertet, wie weit man noch vom Ziel entfernt ist, sondern der Aufwand, der zum Erreichen der Zwischenlösung erforderlich war. Diese heuristische Funktion wird mit g bezeichnet.

Beim Schach hingegen kann die Auswahl eines Zuges durch eine Schätzung der Qualität der erreichten Stellung oder der zu erzielenden Verbesserungen durch einen Zug erfolgen. Hier bewertet man die Stellungen auf dem Schachbrett und wählt solche Züge aus, die bezüglich dieser Bewertung günstig sind. Wählt man diese Bewertung so, dass ein Zielzustand eine Bewertung von null bekommt, entspricht dies der heuristischen Funktion h.

Damit ergeben sich zwei mögliche Komponenten einer heuristischen Funktion:

- Bisheriger Aufwand (g)
- Geschätzte Distanz zum Ziel (h)

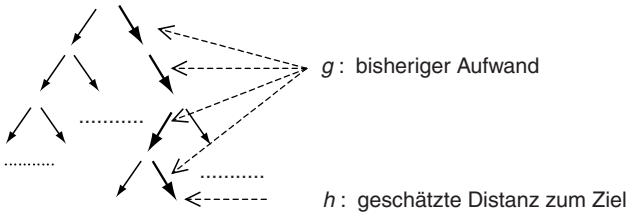


Bild 3.12 Bewertungsfunktionen für Suche

Einfache Beispiele für die Funktionen h und g sind gegeben durch:

- g: bisherige Schritte
- h: geschätzte Zahl der noch nötigen Schritte

An Beispielen illustrieren wir die Verwendung der heuristischen Funktionen.

Beispiel 3.5 Das Steine-Problem

Es liegen drei weiße Steine links von drei schwarzen Steinen. Es gibt dazwischen eine Lücke, in die genau ein Stein passt.

Die weißen Steine sind nach rechts zu bringen, die schwarzen nach links:

Dazu darf man

- einen Stein schieben,
- über einen anderen Stein springen oder
- über zwei Steine springen.

Die möglichen Aktionen werden dabei mit Kosten belegt. Das Schieben und das Springen über einen Stein kosten jeweils 1, das Springen über zwei Steine kostet 2. Wie findet man eine Zugfolge mit minimalem Aufwand?

Dieses Beispiel veranschaulicht die beschriebenen möglichen Informationen zur Steuerung der Suche. Die Funktion g, die den bisherigen Aufwand misst, summiert die Kosten der bisherigen Aktionen.

Als Darstellung eines Zustands wird in PROLOG eine Liste gewählt:

```
[s, s, w, w, ' ', w, s].
```

Das Schieben eines Steins erfordert, dass neben dem Stein das freie Feld ist:

```
zustandsuebergang(State1, State2) :-
   append(L1, [X, ' ' | L2], State1),
   append(L1, [' ', X | L2], State2).
zustandsuebergang(State1, State2) :-
   append(L1, [' ', X | L2], State1),
   append(L1, [X, ' ' | L2], State2).
```

Zur Erläuterung sei bemerkt, dass `append/3` hier ausgenutzt wird, um den aktuellen Zustand in zwei Teillisten zu zerlegen. Es wird nach einer Zerlegung der Liste `State1` gesucht, so dass die zweite (rechte) Teilliste mit einem Stein und der Leerposition oder umgekehrt beginnt. Analog definiert man das Springen über einen Stein:

```
zustandsuebergang(State1, State2) :-
   append(L1, [Y, X, ' ' | L2], State1),
   append(L1, [' ', X, Y | L2], State2).
zustandsuebergang(State1, State2) :-
   append(L1, [' ', X, Y | L2], State1),
   append(L1, [Y, X, ' ' | L2], State2).
```

Als Übungsaufgabe sind die Regeln für das Springen über zwei Steine zu entwickeln.

Wir gehen nun auf einige Strategien ein, die auf den heuristischen Funktionen g oder h aufbauen.

3.3.1 Heuristik des nächsten Nachbarn

Eine mögliche Strategie ist die **Heuristik des nächsten Nachbarn** (Nearest Neighbour Heuristic, NNH). Die Heuristik des nächsten Nachbarn wählt immer den Folgezustand aus, der mit den geringsten Kosten zu erreichen ist. Für das Rundreiseproblem sieht sie wie folgt aus. Die Startstadt sei wieder vorgegeben.

Solange noch nicht alle Städte besucht sind, wähle aus den noch nicht besuchten Städten die zur aktuellen Stadt am nächsten gelegene Stadt aus.

Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit der NNH ist die Aufwandsabschätzung g für die Zustandsübergänge. Man sucht immer den nächstgelegenen Nachbarn, den Knoten, den man mit minimalen Kosten erreicht und der noch nicht besucht wurde.

Bei der NNH-Strategie gibt es kein Zurückgehen und Suchen nach Alternativen im Suchraum. Ist ein Zustandsübergang gewählt, wird von diesem nicht mehr weggegangen. Diese Strategie ist demzufolge unvollständig, sie wird im Allgemeinen keine optimale Lösung liefern. NNH hat aber nur noch einen Zeitaufwand von $O(n^2)$. Liegt kein genaues Abstandsmaß vor, ist die Anwendung der NNH-Strategie nicht sinnvoll. Dies ist beispielsweise beim Schach der Fall.

In Bild 3.13 ist ein typisches Verhalten der NNH-Strategie dargestellt. Es ist für die sechs Städte eine optimale Route zu berechnen. Als Startstadt wird Wismar gewählt. Da Schwerin näher als Rostock liegt, wird zunächst Schwerin besucht. Nun wird Rostock gewählt, dann Stralsund, Greifswald und Neubrandenburg. Diese Lösung ist nicht optimal. Die berechnete Route hat eine Länge von 445 km. Die optimale Strecke hat eine Länge von 420 km.

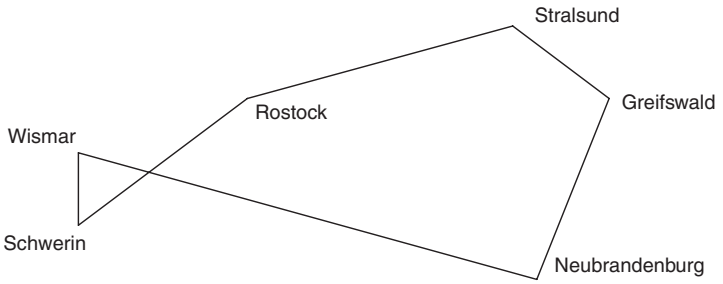


Bild 3.13 Rundreiseproblem für die sechs Städte – NNH

Wie ordnet sich gemäß obiger Überlegungen zu möglichen heuristischen Funktionen die Heuristik des nächsten Nachbarn ein? Es handelt sich hier nicht um eine Schätzung der Entfernung des aktuellen Knotens zum Ziel, sondern um den Versuch der Minimierung des Aufwandes für die Zustandsübergänge. NNH benutzt die Information über die Aufwandsfunktion g. Sei z_1 der Startzustand.

Listing 3.4 NNH-Algorithmus - Strategie des nächsten Nachbarn

```
FUNCTION NNH
  p := z1;     Ziel_erreicht := false;
  REPEAT
    p := z1z2...zm ;
    Ziel_erreicht := ziel(zm) ;
    IF NOT Ziel_erreicht THEN
      Suche den nächstgelegenen Nachbarn von $z_m$ : $x$ ;
    p := z1z2...zmx ;
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN p;
END
```

Wird die NNH-Strategie auf das Steineproblem (Beispiel 3.5 auf Seite 129) angewendet, so benutzt man die gegebene Kostenfunktion g. Das Schieben eines Steins und das Springen über einen Stein kosten jeweils 1, das Springen über zwei Steine kostet 2.

Mit der NNH-Strategie wird keine Lösung gefunden. Dies ist darin begründet, dass NNH den billigsten Nachbarn wählt. Da das Schieben eines Steines und das Springen über einen Stein bezüglich der Kosten gleich sind, nur das Springen über zwei Steine teurer ist, ergeben sich mehrere „gleich gute“ Wege, von denen aber immer genau einer ausgewählt wird. Es gibt bei der NNH-Strategie kein Backtracking, also kein Suchen nach alternativen Lösungen. Hat sich NNH für einen Weg entschieden, dann wird nur auf diesem weitergesucht.

3.3.2 Bergsteiger-Strategie

Benutzt die Heuristik des nächsten Nachbarn ausschließlich die Information über die Kosten der Zustandsübergänge (g), so verwendet die **Bergsteiger-Strategie (Hill Climbing)** nur die geschätzte Entfernung zum Ziel (h). Es wird nur dann auf einen Folgezustand übergegangen, wenn dieser näher zum Ziel liegt. Die Bergsteiger-Heuristik erlaubt damit im Gegensatz zur NNH-Strategie das Durchsuchen mehrerer Kandidaten. Anschaulich gesprochen schneidet diese Strategie im Suchraum alle Zweige ab, bei denen der Nachfolger schlechter als sein Vorgänger ist.

Die Bergsteiger-Strategie setzt die Bewertungsfunktion h für den Abstand zum Ziel voraus.

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass ein Minimierungsproblem (h) zu lösen ist. Hill Climbing sucht nach Maxima. Dies ist natürlich kein Problem, da das Minimum der Funktion h gleichzeitig das Maximum der Funktion $-h$ ist.

Im Listing 3.5 ist der Algorithmus dargestellt. Es wird von einer Minimierung ausgegangen. Die Bewertung der Zustände darf sich nicht wieder vergrößern.

Listing 3.5 Algorithmus – Hill climbing

```
FUNCTION HILL CLIMBING
  Kand := [z1];     Ziel_erreicht := false;
  REPEAT
    Sei Kand = [z1z2...zm,  p2,p3,...,pn] ;
    p := z1z2...zm ;
```

```
    Ziel_erreicht := ziel(z_m) ;
    IF NOT Ziel_erreicht THEN
      Berechne alle Zustände [s_1,...,s_k], die von z_m in einem Schritt erreicht
          werden können und für die gilt h(z_m) ≥ h(s_i) ;
      Füge die Wege z_1 z_2 ... z_m s_1, ... , z_1 z_2 ... z_m s_k in Kand ein;
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN p;
END
```

Da beim Hill Climbing Teile des Suchraums abgeschnitten werden, kann die Vollständigkeit verloren gehen. Ob dies der Fall ist, hängt vom jeweiligen Problem und der verwendeten heuristischen Funktion ab.

Es kann das aus der Optimierung bekannte Problem der lokalen Optima auftreten. Ein Figurenopfer beim Schach wird die Bewertung der Stellung verschlechtern. Dies kann aber langfristig günstig sein.

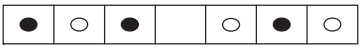
Soll die Bergsteiger-Strategie auf das Steineproblem angewandt werden, benötigen wir eine Bewertung des jeweiligen Zustands bezüglich seines Abstands vom Ziel. Als Bewertungszahl kann die Anzahl der Positionen, die durch Steine falscher Farbe belegt sind, genommen werden.

Mit dieser Funktion h scheitert die Bergsteiger-Strategie jedoch, da die Ausgangsstellung

eine Bewertung von 6 bekommt und jede Stellung, die durch eine Aktion erreicht werden kann, die Bewertung 7 bekommt.

Wir benötigen eine feinere Bewertungsfunktion h. Insbesondere müssen wir die Entfernung der Steine von ihren korrekten Positionen einbeziehen. Der nächste Ansatz berücksichtigt, dass alle schwarzen Steine links von den weißen Steinen liegen sollen. Man sucht den am weitesten links liegenden weißen Stein und sucht die schwarzen Steine, die rechts von diesem weißen Stein liegen. Für jeden solchen schwarzen Stein berechnet man den Abstand zum weißen Stein. Liegt ein schwarzer Stein bereits links von den weißen Steinen, so geht er nicht in die Bewertung ein.

Die Stellung



bekommt die Bewertung 5. Der linke weiße Stein ist auf Position 2. Rechts von ihm liegen zwei schwarze Steine, der eine mit einem Abstand von 1, der andere mit einem Abstand von 4. Mit dieser heuristischen Bewertung findet die Bergsteigerstrategie nach 27 Schritten eine Lösung, die einen Aufwand von 17 erfordert. Die optimale Lösung benötigt einen Aufwand von 15.

3.3.3 Bestensuche

Bestensuche (best first) ist eine Variante der Breitensuche. Vorausgesetzt wird die Bewertungsfunktion h für den geschätzten Abstand eines Kandidaten zu einem Ziel.

Die Idee ist: Man nimmt aus der Menge aller Kandidaten nicht einen beliebigen Weg, sondern man wählt denjenigen, dessen Bewertung am besten ist und sucht auf diesem Weg weiter.

Beste Bewertung heißt: Es wird der Kandidat, der gemäß unserer Schätzung (h) einem Ziel am nächsten ist, gewählt. Die bisherigen Kosten (g) spielen bei der Bestensuche – wie auch bei der Bergsteiger-Strategie – keine Rolle.

Bestensuche strukturiert den Suchraum nicht nach der Tiefe, wie dies bei Breitensuche der Fall ist, sondern nach der Qualität der partiellen Lösung. Im Gegensatz zur NNH-Strategie geht Bestensuche nicht blind in einen Zweig des Suchraums hinein, sondern steuert die Reihenfolge der Abarbeitung der Kandidaten nach deren Qualität.

Listing 3.6 Algorithmus – Bestensuche

```
FUNCTION BESTENSUCHE
  Kand := [z1];       Ziel_erreicht := false;
  REPEAT
    Wähle den besten Kandidaten aus Kand aus. p := z1z2...zm ;
    Ziel_erreicht := ziel(zm) ;
    IF NOT Ziel_erreicht THEN
      Berechne alle Zustände, die von zm in einem Schritt
            erreicht werden können :  [s1,...,sk] ;
      Lösche p in Kand, füge z1z2...zms1, ... , z1z2...zmsk ein;
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN p;
END
```

Bestensuche strukturiert den Suchraum, reduziert ihn nicht. Damit bleibt die Vollständigkeit erhalten. Wendet man Bestensuche auf das Steineproblem (Beispiel 3.5 auf Seite 129) an und verwendet man die Bewertung, die den linken weißen Stein mit den rechts davon liegenden schwarzen Steinen vergleicht, so wird eine Lösung nach 16 Schritten gefunden. Diese ist aber mit einem Aufwand von 17 wiederum nicht optimal.

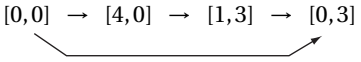
3.3.4 A*-Suche

Eine verfeinerte Variante des Vorgehens der Bestensuche ist der A*-Algorithmus. Er verwendet im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Strategien sowohl die bisherigen Kosten als auch den geschätzten Abstand zum Ziel. Die heuristischen Funktionen g und h werden vorausgesetzt:

- Kosten für den bisherigen Weg: g
- Abstandsmaß für den Abstand des aktuellen Knoten zum Ziel: h

Zur Bewertung eines Kandidaten wird eine Funktion f benutzt, die sich aus g und h zusammensetzt. f wird durch die Summe aus g und h gebildet. Da g die bisherigen Kosten misst, wird g nie negativ sein.

Der A*-Algorithmus benutzt eine interessante Beobachtung. Betrachten wir dazu das Wasserproblem. In folgender Grafik sind mögliche Zustandsübergänge dargestellt:



Es fällt auf, dass man zum Zustand [0, 3] über verschiedene Wege kommt. Es ist nun offensichtlich unnötig, beide Kandidaten weiterzuverfolgen. Deshalb kann man den schlechteren

verwerfen. Er wird keine optimale Lösung liefern und kann daher im Suchraum gelöscht werden.

Benutzt man zur Bewertung der bisherigen Kosten (g) die Anzahl der bisherigen Aktionen, so kann der Weg $[0,0] \rightarrow [4,0] \rightarrow [1,3] \rightarrow [0,3]$ „vergessen“ werden, da der Weg $[0,0] \rightarrow [0,3]$ günstiger ist.

Diese Beobachtung wird beim A*-Algorithmus ausgenutzt.

Der A*-Algorithmus wird auf andere Art als die Breiten- und Tiefensuche umgesetzt. Man verwaltet zwei Mengen von Knoten (Zuständen):

- Knoten, die bereits bewertet, aber noch nicht expandiert wurden (offene Knoten),
- Knoten, die bewertet und expandiert wurden (geschlossene Knoten).

Mit Expandieren wird wieder das Berechnen der Nachfolger – der Zustände, die in einem Schritt erreichbar sind – bezeichnet.

Beide Knotenarten werden in separaten Datenstrukturen verwaltet: OPEN, CLOSED.

Das Vorgehen des A*-Algorithmus wird zunächst an einem abstrakten Beispiel erläutert. Sei der in Bild 3.14 dargestellte Suchraum gegeben. Er wird so in der Praxis nie explizit zur Verfügung stehen, sondern eventuell nur in Form von durch Regeln beschriebenen Zustandsübergängen.

Die Zahlen an den Knoten sind die Bewertungen bezüglich des geschätzten Abstands zum Ziel (h), an den Kanten stehen die Kosten für den jeweiligen Zustandsübergang (g).

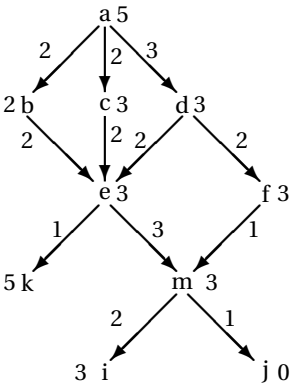


Bild 3.14 A*-Beispielsuchraum

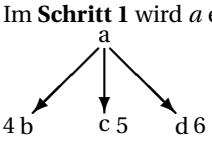
Der Startzustand sei a. Einziger Zielzustand sei j.

Übung 3.1 Suchraum

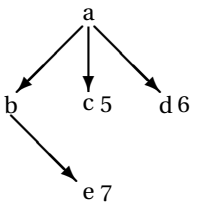
Wie viele Wege gibt es von a nach j? Welche Kosten haben diese?

Wie erfolgt nun die Suche mittels des A*-Algorithmus? Dazu wird schrittweise dargestellt, wie sich die potenziellen Kandidaten entwickeln. Es werden die offenen Knoten mit ihrer jeweiligen Bewertung dargestellt.

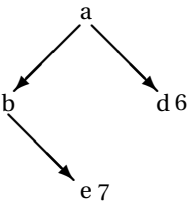
Im **Schritt 1** wird *a* expandiert:



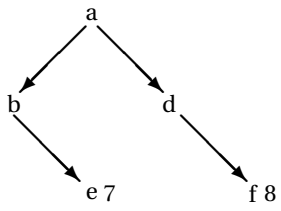
Im **Schritt 2** wird mit dem besten Kandidaten *b* weitergearbeitet:

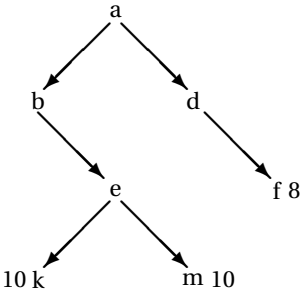


Schritt 3: Nun ist der beste Kandidat *c*. Beim Expandieren wird festgestellt, dass der Knoten *e* bereits in OPEN ist (sprich: Wir haben bereits einen Weg zu *e*). Da der neue Weg über *c* keine bessere Bewertung für *e* (7) ergibt, kann der Weg über *c* gelöscht werden. Da *c* keine weiteren Nachfolger hat, entfällt auch *c* und die Kante zu *c*.



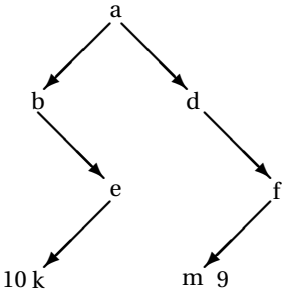
Im **Schritt 4** wird *d* expandiert, der Weg zu *e* ist schlechter als der bisher gefundene. Er wird demzufolge verworfen. Im **5. Schritt** wird *e* expandiert.





Das Expandieren von *f* (**Schritt 6**) führt zu einem besseren Weg zu *m*.

Schritt 7: Anschließend wird der Knoten *m* expandiert, und man gelangt zur Lösung *j*.



In Tabelle 3.3 auf der nächsten Seite ist der Ablauf der Suche dargestellt. Bei den OPEN-Knoten ist die Bewertung für $f = g + h$ mit angegeben.

Im Listing 3.7 ist der A*-Algorithmus dargestellt.

Listing 3.7 A*-Algorithmus

```
FUNCTION A-STERN
  Ziel_erreicht := false;
  OPEN := [z1]; CLOSED := [ ];
  REPEAT
    x := bester Knoten (bez. f) aus OPEN ;
    Ziel_erreicht := ziel(x) ;
    IF NOT Ziel_erreicht THEN
      Lösche x in OPEN; Füge x in CLOSED ein;
      SUCCESSORS := alle Nachfolger von x ;
```

Tabelle 3.3 Ablauf A*-Algorithmus

Schritt	Expandierter Knoten	OPEN	CLOSED	Bemerkung
0		a/5	–	
1	a	b/4, c/5, d/6	a	
2	b	c/5, d/6, e/7	a, b	
3	c	d/6, e/7	a, b, c	Das Expandieren von c liefert einen Weg von a nach e, der nicht besser ist als der bisherige.
4	d	e/7, f/8	a, b, c, d	Weg $a-d-e$ ist schlechter als $a-b-e$.
5	e	f/8, k/10, m/10	a, b, c, d, e	
6	f	m/9, k/10	a, b, c, d, e, f	Der Weg zu m über f ist besser als der vorherige über e.
7	m	j/7, k/10, i/11	a, b, c, d, e, f, m	Lösung j gefunden.

```
      FORALL y ∈ SUCCESSORS
        IF y ∈ OPEN THEN
          Vergleiche neuen Weg zu y mit bisherigem und lösche den schlechteren;
        ELSEIF y ∈ CLOSED THEN
          Vergleiche neuen Weg zu y mit bisherigem und lösche den schlechteren;
        ELSE Füge y in OPEN ein ;
        ENDIF;
      ENDFORALL;
    ENDIF;
  UNTIL Ziel_erreicht;
  RETURN x;
END
```

Man kann die A*-Suche relativ einfach implementieren. Es werden Zeiger zwischen den Knoten eingerichtet, und zwar von einem Knoten auf seine Nachfolger und von allen Knoten aus OPEN und CLOSED auf deren jeweiligen besten Vorgänger. Dies ist möglich, da durch den A*-Algorithmus gewährleistet ist, dass jeder bereits bearbeitete Knoten maximal einen Vorgänger hat. Findet man während der Suche einen besseren Vorgänger eines Knotens, so wird der Zeiger auf den besten Vorgänger ersetzt. Die neue, bessere Bewertung wird auf alle Folgezustände und sukzessive auf deren Folgezustände propagiert.

Da die Bewertung der Kosten für das Erreichen eines Zustands über die Summe aller Zustandsübergänge zum aktuellen Knoten erfolgt, ist dies korrekt.

An den Knoten werden nur die g-Werte gespeichert. Da der h-Wert unabhängig von der Art des Erreichens des Knotens ist und ohnehin gegeben ist, muss dieser Wert nicht nochmal speichert werden.

Wie verhält sich der A*-Algorithmus bezüglich der optimalen Lösung? Findet der Algorithmus immer den (bezüglich der f-Bewertung) besten Weg? Um dies zu untersuchen, wird eine Eigenschaft der für die Schätzung des Abstands eingeführten Funktion h definiert.

Definition 3.5 Zulässigkeit einer Schätzfunktion h

Eine Funktion h zur Bewertung eines Knotens heißt **zulässig**, wenn sie die Kosten, um zum Ziel zu kommen, nicht überschätzt:

Für jeden Knoten n und jeden Zielknoten z, der von n aus erreichbar ist, gilt:

$h(n) \leq g(z) - g(n)$.

Nun können wir eine Aussage über die Optimalität der vom A*-Algorithmus gefundenen Lösung treffen.

Satz 3.1 Optimalität

Ist die Funktion h zulässig, so ist der A*-Algorithmus optimal. ■

Der Satz besagt, dass mit dem A*-Algorithmus immer eine optimale Lösung gefunden wird, wenn die verwendete Funktion h zulässig ist, sprich wenn sie die tatsächlichen Kosten nicht überschätzt. Dies wird sich aber nicht immer realisieren lassen, da über ein Problem nicht zwingend genügend Informationen vorliegen müssen, um dies abzusichern. In dem obigen abstrakten Beispiel wird deshalb bewusst eine nicht zulässige Funktion h verwendet.

Wendet man den A*-Algorithmus auf das Steineproblem (Beispiel 3.5 auf Seite 129) an, so wird die optimale Lösung nach 21 Schritten gefunden. Als Funktion h benutzen wir wieder den Vergleich der Position der schwarzen Steine mit der Position des linken weißen Steins.

3.4 Das Rundreiseproblem

Die verschiedenen Suchstrategien werden auf das Rundreiseproblem angewandt. Dazu wird die Aufgabe betrachtet, eine optimale Rundreise für 12 Städte in Mecklenburg-Vorpommern zu finden. Die Entfernungskilometer wurden einer Landkarte entnommen, sie können eventuell von den tatsächlichen etwas abweichen.

Bevor auf die Suchverfahren eingegangen wird, sei zunächst auf eine wesentliche Eigenschaft des Rundreiseproblems hingewiesen. Betrachtet man die Wege

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$$

und

$$a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow d$$

so stellt man fest, dass diese bezüglich der Aufgabenstellung äquivalent sind, wenn die Weglängen zunächst nicht berücksichtigt werden. Es interessiert an diesen Wegen nur, dass von der Stadt a zur Stadt d gefahren wurde und dabei die Städte c und b besucht wurden. Werden nun auch die Weglängen berücksichtigt, so ist klar, dass die längere Strecke nie zu einer optimalen Lösung für das Rundreiseproblem führen kann. Sie muss folglich als Kandidat nicht betrachtet werden und kann gelöscht werden. Dies ist eine nützliche Beobachtung, da der Suchraum damit eingegrenzt wird.

Tiefen- und Breitensuche können von vornherein ausgeschlossen werden, da beide keinerlei Information über das Problem benutzen.

Für die Strategie des nächsten Nachbarn haben wir im Abschnitt 3.3.1 dargestellt, welche Effekte auftreten können.

Für die weiteren Strategien benötigt man neben der Kostenfunktion g, die beim Rundreiseproblem durch die bisherigen Kilometer gegeben ist, nun eine heuristische Funktion h zum Schätzen des Abstands zum Ziel. Eine mögliche Schätzfunktion ist dadurch gegeben, dass bekannt ist, wie viele Städte noch zu besuchen sind.

Variante 1: Anzahl der fehlenden Städte

Wendet man die **Bestensuche** mit dieser Heuristik auf das Rundreiseproblem an, so stellt man fest, dass sie sich wie Tiefensuche verhält. Bestensuche verwendet die bisherigen Kosten nicht. Berechnet man die Nachfolger eines Knotens k, so ist in diesen neuen Knoten eine Stadt mehr besucht worden als in k. Diese haben somit eine um 1 bessere Bewertung als k. Somit werden die neuen Knoten den alten Knoten *immer* vorgezogen. Dies entspricht exakt der **Tiefensuche**.

Wendet man den **A*-Algorithmus** auf das Problem an, so stellt man fest, dass sich A*-Suche ähnlich wie Breitensuche verhält.

Tabelle 3.4 auf der nächsten Seite enthält einen Protokoll-Ausschnitt. Es sind die bearbeiteten Kandidaten und deren Bewertungen dargestellt. Die Bewertungen enthalten die bisherigen Kilometer, die fehlenden Städte sowie die Summe beider Zahlen.

Wieso verhält sich der A*-Algorithmus hier „breitenorientiert“? Dies liegt daran, dass die Zahl der fehlenden Städte bei der Bewertung eines Zustands eine geringfügige Rolle spielt. Die bisherigen Kosten, die bereits zurückgelegten Kilometer spielen dagegen eine weit stärkere Rolle. Aufgabe der Schätzfunktion h ist es aber, eine große Distanz zu einer Lösung auch entsprechend stark zu „bestrafen“. Die Anzahl der fehlenden Städte wird als Strafmaß kaum ausreichen.

Variante 2: Schätzen der noch erforderlichen Kilometer

In geeigneter Art und Weise rechnen wir die Zahl der fehlenden Städte in noch zurückzulegende Kilometer um. Dazu wird die Zahl der fehlenden Städte mit einem Kilometer-Faktor multipliziert. Zunächst wählen wir 100. Der Ablauf der Suche ist in Tabelle 3.5 auf der nächsten Seite dargestellt.

Die A*-Suche verhält sich jetzt wie Tiefensuche. Die in Tabelle 3.5 auf der nächsten Seite gefundene Lösung ist auch keineswegs eine optimale Lösung. Woran liegt das? Der Straffaktor ist zu groß, so dass die heuristische Funktion g für die bisherigen Kosten eine untergeordnete Rolle spielt. h ist keine zulässige Funktion, da der Abstand zum Ziel offensichtlich überschätzt wird. Dies ist auch die Begründung dafür, dass keine optimale Lösung gefunden wird.

Wie lässt sich nun ein angemessener Faktor ermitteln? Er darf nicht zu klein sein, da sich A*-Suche dann im Prinzip wie Breitensuche verhält. Er darf aber auch nicht zu groß sein, da das Verfahren dann zu sehr in die Tiefe geht. Unter Umständen müssen wir uns von der Forderung der Zulässigkeit der heuristischen Funktion h lösen, da dies zwar theoretisch gefordert ist, aber aus den obigen praktischen Tests ersichtlich ist, dass das Verfahren dann zu sehr in der Breite suchen wird.

Tabelle 3.4 A*-Suche mit Zählen der fehlenden Städte

Schritt	Strecke	g	h	$g+h$
1	nwm	0	12	12
2	nwm-dbr	61	11	72
3	nwm-lwl	75	11	86
4	nwm-pch	76	11	87
5	nwm-gue	83	11	94
6	nwm-lwl-pch	105	10	115
7	nwm-pch-lwl	106	10	116
8	nwm-dbr-gue	111	10	121
9	nwm-gue-dbr	133	10	143
10	nwm-pch-gue	135	10	145
11	nwm-muer	136	11	147
12	nwm-nvp	140	11	151
13	nwm-gue-pch	142	10	152
14	nwm-gue-muer	144	10	154
15	nwm-dbr-dm	153	10	163
16	nwm-pch-muer	154	10	164
17	nwm-dbr-muer	155	10	165
18	nwm-dm	155	11	166
19	nwm-gue-dm	159	10	169
20	nwm-dbr-pch	161	10	171
21	nwm-dbr-nvp	162	10	172
22	nwm-lwl-pch-gue	164	9	173

Tabelle 3.5 A*-Suche mit Straffaktor 100

Schritt	Strecke	g	h	$g+h$
1	nwm	0	1200	1200
2	nwm-dbr	61	1100	1161
3	nwm-dbr-gue	111	1000	1111
4	nwm-dbr-gue-pch	170	900	1070
5	nwm-dbr-gue-pch-lwl	200	800	1000
6	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer	308	700	1008
7	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst	353	600	953
8	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst-uer	426	500	926
9	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst-uer-ovp	474	400	874
10	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst-uer-ovp-dm	522	300	822
11	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst-uer-ovp-dm-nvp	555	200	755
12	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst-uer-ovp-dm-nvp-rueg	608	100	708
13	nwm-dbr-gue-pch-lwl-muer-mst-uer-ovp-dm-nvp-rueg-nwm	786	0	786

Berechnen wir die durchschnittliche Entfernung zweier Städte, so erhalten wir einen Wert von 116 km. Da er größer als 100 ist, steht fest, dass er zu groß ist. Dieser Ansatz ist bei genauerem Überlegen ohnehin nicht günstig, da Verbindungen zweier Städte über eine große Entfernung bei der optimalen Lösung keine Rolle spielen werden. Sie sorgen aber für einen hohen Durchschnittswert.

Eine weitere Variante besteht darin, dass man die maximale Entfernung zweier Städte berechnet (229 km) und davon ausgeht, dass sich alle Städte äquidistant auf einem Kreis mit entsprechendem Durchmesser anordnen lassen. Man erhält dann als Entfernung zwischen zwei Städten 60 km.

Das Verhalten des A*-Algorithmus ist nun wesentlich erfolgversprechender (Tabelle 3.6).

Tabelle 3.6 A*-Suche mit Straffaktor 60

Schritt	Strecke	g	h	$g+h$
1	nwm	0	720	720
2	nwm-dbr	61	660	721
3	nwm-dbr-gue	111	600	711
4	nwm-dbr-gue-pch	170	540	710
5	nwm-dbr-gue-pch-lwl	200	480	680
6	nwm-dbr-gue-muer	172	540	712
7	nwm-dbr-gue-muer-mst	217	480	697
8	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer	290	420	710
9	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp	338	360	698
10	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp-dm	386	300	686
11	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp-dm-nvp	419	240	659
12	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp-dm-nvp-rueg	472	180	652
13	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp-nvp	400	300	700
14	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp-nvp-dm	433	240	673
15	nwm-dbr-gue-muer-mst-uer-ovp-nvp-rueg	453	240	693
16	nwm-dbr-gue-muer-dm	231	480	711
17	nwm-dbr-gue-muer-dm-nvp	264	420	684
18	nwm-dbr-gue-muer-dm-nvp-rueg	317	360	677
19	nwm-dbr-gue-muer-dm-nvp-ovp	326	360	686
20	nwm-dbr-gue-muer-dm-nvp-ovp-uer	374	300	674
21	nwm-dbr-gue-muer-dm-nvp-ovp-uer-mst	447	240	687
22	nwm-dbr-gue-muer-dm-ovp	279	420	699

Die optimale Lösung mit einer Länge von 701 km wird im 68. Schritt gefunden. Die optimale Lösung für das Rundreiseproblem mit allen 18 Städten wird nach 1520 Schritten gefunden. Sie hat eine Länge von 743 km. Zum Vergleich sei auf die Abschnitte 7.1.4 und 8.2 verwiesen, wo das Rundreiseproblem unter Nutzung neuronaler Netz gelöst wird.

Zusammenfassung

Wir haben Suche als Problemlösungstechnik untersucht. Suche ist immer dann möglich, wenn man den Problembereich als **Zustandsraum** (gerichteter Graph) darstellen kann. Damit reduziert sich das Problem auf die Suche eines Weges von einem **Startknoten** zu einem **Zielknoten**. Mehrere Zielknoten sind möglich.

Sowohl **uninformierte** als auch **heuristische Suchverfahren** wurden vorgestellt. Uninformierte Suchverfahren durchsuchen den Suchraum nach bestimmten Strategien. **Tiefensuche** steigt in einen Zweig des Suchgraphen ab und verlässt ihn erst wieder, wenn er komplett durchsucht wurde. **Breitensuche** geht ebenenweise vor, untersucht zunächst alle Wege der Länge 1, dann 2 usw.

Die heuristischen Verfahren benutzen Zusatzinformationen über das gegebene Problem, um so einen möglichst vielversprechenden Kandidaten zu bevorzugen. Mögliche Informationen über die Qualität eines Weges sind die Information über den **bisherigen Aufwand** und die **geschätzte Entfernung zum Ziel**. Beide Informationen werden beim klassischen Vertreter der heuristischen Verfahren – **A*-Suche** – benutzt. Darüber hinaus schließt der A*-Algorithmus Mehrfachwege zu einem Knoten aus und erreicht damit häufig eine Reduzierung des Suchraums. In Tabelle 3.7 wird eine Übersicht über die vorgestellten Verfahren und die von diesen verwendeten Informationen gegeben.

Tabelle 3.7 Suchverfahren und ihre Charakteristika

Verfahren	heuristische Funktion	Wesentliche Merkmale
Breitensuche	–	Alte Kandidaten werden den neuen vorgezogen.
Tiefensuche	–	Es wird mit den neuen Kandidaten weitergearbeitet.
Bestensuche	h	Aus den möglichen Kandidaten wird der bezüglich h beste Kandidat gewählt.
Bergsteiger	h	Es werden nur solche Folgezustände akzeptiert, deren h-Bewertung besser ist.
Nächster Nachbar	g	Es wird der Knoten als nächster besucht, der am nächsten zum aktuellen Knoten liegt.
A*-Algorithmus	$g+h$	Bestensuche mit heuristischer Funktion $g+h$. Mehrfachwege werden vermieden.

Wie ordnet sich Suche in die allgemeine Problemlösung ein? Ein typisches Vorgehen bei der Problemlösung ist:

1. Problemdefinition
2. Analyse des Problems
3. Isolieren des für das Problem wichtigen Wissens und Wahl einer geeigneten Repräsentationsform
4. Auswahl einer geeigneten Problemlösungstechnik.

Gelingt es, das Problem als Suchraum (Ausgangs- und Zielzustand, Zustandsübergänge) zu definieren, kann im Schritt 4 ein Suchverfahren eingesetzt werden.

Wichtig ist, dass man die Suche mit möglichst viel Information ausstattet, um dadurch eine Reduzierung des Suchraums zu erreichen. Die Qualität der Schritte 2 und 3 ist wesentlich und

eventuell entscheidend für Erfolg oder Misserfolg einer Problemlösung. Welche Problemcharakteristiken sind denkbar?

- Ist das Problem zerlegbar? Kann man das Problem in kleinere und damit weniger komplexe Teilprobleme zerlegen?
- Kann man Schritte ignorieren? Beim Rundreiseproblem wurde dies in Form des Vergleichs mit der lokal besten Lösung diskutiert.
- Ist die Lösung ein Zustand oder ein Pfad? Beim Wasserproblem interessiert nicht nur, ob man zu zwei Litern gelangen kann, sondern natürlich auch wie. Ist der Suchraum durch mögliche Interpretationen eines mehrdeutigen Satzes definiert, so interessiert nur der Zielzustand, nicht der Weg.

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass man mit der Suche durchaus auch beim Ziel beginnen kann. Dies bedeutet, dass im Prinzip rückwärts gesucht wird. Man geht vom Ziel aus und sucht nach Vorgänger-Zuständen. Die hier vorgestellten Strategien können wieder angewendet werden. Auch Mischvarianten zwischen **Vorwärts-** und **Rückwärtssuche** sind möglich.

Es gibt eine Reihe von weiteren Suchtechniken. Bei der Bergsteiger-Strategie tauchte das Problem der lokalen Optima auf, aus denen die Bergsteiger-Strategie nicht wieder herauskommt. Dies führte zu der Idee, dass man die Strategie etwas aufweicht und zunächst auch eine Verschlechterung zulässt. Mit zunehmender Zeit verschärft man die Zulässigkeit eines Zustandsübergangs dahingehend, dass der Grad einer Verschlechterung immer mehr begrenzt wird. Dieses Prinzip liegt den Verfahren **simuliertes Ausglühen** (**Simulated Annealing**) und **Threshold Accepting** zugrunde.

Im Abschnitt 3.2 sind wir auf **Iterative Deepening** eingegangen. Iterative Deepening begrenzt die Tiefe für die Tiefensuche. Diese Begrenzung wird nach und nach vergrößert. Damit erreicht man eine Kombination der Vorteile von Breiten- und Tiefensuche. Ein analoges Vorgehen stellt **Iterative Broadening** dar. Es wird Breitensuche durchgeführt. Man begrenzt allerdings die Zahl der untersuchten Nachfolger eines Knotens. Im ersten Zyklus werden immer nur die ersten zwei Nachfolger eines Zustands weiter betrachtet. Führt dies nicht zu einer Lösung, beginnt man wieder von vorn, lässt nun aber drei Nachfolger zu. Sukzessive erhöht man die Zahl der betrachteten Nachfolger, bis eine Lösung gefunden wird.

Betrachtet man das in Abschnitt 4.6.3 vorgestellte Acht-Damen-Problem – acht Damen sind auf einem Schachbrett so zu positionieren, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können – so erkennt man, dass dies ein typisches Zuordnungsproblem ist. Zuordnungsprobleme sind dadurch ausgezeichnet, dass bestimmten Variablen Werte zugeordnet werden müssen. Die Zuordnung unterliegt aber bestimmten Restriktionen oder Beschränkungen (**Constraint**). Zur Lösung solcher Constraint-Probleme sei auf [BHSA07] verwiesen.

Viele Spiele lassen sich als Suchproblem darstellen. Spiele haben im Allgemeinen aber eine Besonderheit. Die meisten von ihnen werden von mehreren Agenten gespielt. Diese spielen gegeneinander, haben folglich gegensätzliche Ziele. Einen Schach-Zug wird man so auswählen, dass er die eigene Position stärkt und die gegnerische schwächt. Es gibt eine Reihe von speziellen Strategien und Techniken, die dieser Besonderheit Rechnung tragen, beispielsweise die **MinMax-Strategie** oder α-β-Suche. Für diese Verfahrensklasse sei auf [Gin12] verwiesen.

Häufig lassen sich Probleme nicht so ohne weiteres auf Suchprobleme abbilden. Eines der klassischen Suchprobleme ist das Rucksack-Problem (Knapsack Problem). Ein Rucksack wird mit Gegenständen bepackt. Der Rucksack verträgt aber nur ein bestimmtes Maximalgewicht.

Jeder Gegenstand hat einen bestimmten Wert. Die Aufgabe ist, den Rucksack so zu bepacken, dass er zum einen nicht überladen wird. Zum anderen soll aber der Wert aller Gegenstände im Rucksack maximal sein.

Dies ist mit den hier vorgestellten heuristischen Suchverfahren nicht ohne weiteres lösbar, da die Definition eines Zielzustandes nicht möglich ist. Man kennt das Maximum nicht.

Hier setzen Strategien wie **Tabu-Suche** ein. Im einfachsten Fall erlaubt die Tabu-Suche beim Rucksack-Problem in einem Schritt das Hinzufügen oder das Herausnehmen nur eines Gegenstands. Allerdings werden bestimmte Aktionen verboten. Beispielsweise darf der zuletzt hinzugefügte Gegenstand nicht sofort wieder herausgenommen werden. Diese Aktion ist *tabu*. Ausgehend von der aktuellen Lösung wählt Tabu-Suche die beste Aktion, also die Aktion, die den größten Wertzuwachs bringt. Die Aktionen, die verboten sind, werden in einer Tabu-Liste gespeichert. Dabei gilt eine Aktion nicht auf immer und ewig als tabu, sondern nur für eine bestimmte Zeit. Man bezeichnet dies als Tabu-Dauer. Nach Überschreiten der Tabu-Dauer darf diese Aktion wieder ausgeführt werden.

Übung 3.2 Besten- und Breitensuche

Wann ist Bestensuche schlechter als Breitensuche?

Übung 3.3 Aufwand von A*

Wie hoch ist der Aufwand für A*-Suche im schlechtesten Fall?

Übung 3.4 Verhalten von A*

Wie verhält sich der A*-Algorithmus, wenn man den geschätzten Abstand zum Ziel (h) konstant null setzt und als Kostenfunktion die Zahl der bisherigen Schritte verwendet?

Übung 3.5 Suchverfahren und Branch and Bound

Wie ordnet sich das aus dem Operations Research bekannte Verfahren *Branch and Bound* in die Suchstrategien ein?

Übung 3.6 Breiten- und Tiefensuche

Implementieren Sie Breiten- und Tiefensuche in Java.

Übung 3.7 Damen-Problem

Betrachten Sie das 8-Damen-Problem: Auf einem Schachbrett sind 8 Damen so zu platzieren, dass sie sich gemäß der Schachregeln nicht schlagen können. Untersuchen Sie das Problem und seine Charakteristika und modellieren Sie das Problem als Suchproblem. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der alle Lösungen generiert.

Übung 3.8 Schiebefax

Betrachten Sie das 8-Puzzle-Problem (Schiebefax) und entwickeln Sie dafür unter Anwendung der behandelten heuristischen Techniken (beispielsweise Hill climbing) ein Suchverfahren. Das Schiebefax ist ein 3×3-Quadrat mit 8 verschiebbaren, nummerierten Feldern. Mit Hilfe eines Freifeldes kann man die Teile verschieben. Aufgabe ist es,

die Felder durch Verschieben in die richtige Reihenfolge zu bringen: Die 1. Zeile soll die Felder 1-3 enthalten, die 2. Zeile 4-6, und die 3. Zeile 7-8 sowie das Freifeld.

Zielzustand ist somit:

1	2	3
4	5	6
7	8	

Gehen Sie von diesem Startzustand aus:

5		6
1	2	3
4	7	8

Übung 3.9 Suchprogramm

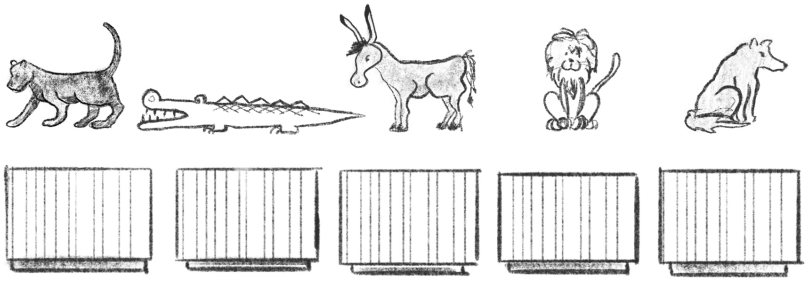
Programmieren Sie die fehlenden Prädikate des PROLOG-Suchprogramms in Abschnitt 3.2 (Uninformierte Suche).

Übung 3.10 A* für Wasserbeispiel

Entwickeln Sie heuristische Funktionen für das Wasserbeispiel und überprüfen Sie, wie sich der A*-Algorithmus mit diesen verhält.

Übung 3.11 Käfigproblem

In einem Zoo befindet sich eine Käfig-Anlage. Allerdings sind die Tiere etwas durcheinander geraten. Keines der Tiere befindet sich im eigenen Käfig. Es gibt einen Außenkäfig. Der Wärter möchte die Tiere umgehend wieder in die korrekten Käfige bringen. Aus nahe liegenden Gründen ist es nicht ratsam, in einem Käfig gleichzeitig zwei Tiere zu haben. Zwischen allen benachbarten Käfigen gibt es Türen, auch zum Außenkäfig.



Löwe-Käfig **Esel-Käfig** **Wolf-Käfig** **Krokodil-Käfig** **Panther-Käfig**

Welches ist die geringste Zahl von Umsetzungen, die der Wärter durchzuführen hat? Stellen Sie das Problem als Suchproblem dar und lösen Sie es mit den unterschiedlichen Strategien.

Übung 3.12 Steine-Regeln

Ergänzen Sie die fehlenden Regeln für die möglichen Zustandsübergänge im Beispiel 3.5 auf Seite 129.

Übung 3.13 Knobelei

Ein Farmer möchte einen Kohlkopf, einen Wolf und eine Ziege mit einem Boot über einen Fluss bringen. Allerdings ist das Boot so klein, dass er jeweils nur den Kohlkopf oder ein Tier mitnehmen kann. Die Ziege mit dem Kohlkopf unbeaufsichtigt zu lassen

ist ebenso unzweckmäßig, wie den Wolf mit der Ziege allein zu lassen. Wie bekommt er doch alle drei über den Fluss? Lösen Sie das Problem mit den vorgestellten Suchverfahren.

Übung 3.14 Rucksack-Problem

Untersuchen Sie, ob man nicht doch den A*-Algorithmus zur Lösung des Rucksack-Problems ausnutzen kann? An welchen Stellen ist es nötig, vom klassischen Vorgehen des A*-Algorithmus abzuweichen?

Übung 3.15 Steine-Beispiel

Verfeinern Sie die heuristische Funktion h für das Steine-Beispiel, so dass die optimale Lösung mit der Bergsteiger-Strategie und der Bestensuche gefunden wird.

Übung 3.16 Färbeproblem

Betrachten Sie das so genannte Färbeproblem (vgl. Abschnitt 4.6.1): Sei eine Landkarte mit k Ländern gegeben. Wir möchten diese Landkarte mit i Farben so einfärben, dass nie zwei benachbarte Länder die gleiche Farbe haben. Kann man dieses Problem mittels Suche lösen?

Übung 3.17 Fairness von A*

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen sich der A*-Algorithmus fair verhält.

Übung 3.18 Bergsteiger- und Bestensuche

Finden Sie Beispiele, wo sich die Bergsteiger- und die Bestensuche unterschiedlich verhalten.

Übung 3.19 Suchprobleme

Stellen Sie Problem-Beispiele dar, die sich als Zustandsraum darstellen lassen. Finden Sie Beispiele, die auf dieses Konzept nicht passen.

Übung 3.20 Tabu-Suche

Stellen Sie Tabu-Suche anhand von ausgewählten Beispielen vor.

Übung 3.21 Rucksack-Problem

Erläutern Sie Lösungsansätze für das Rucksack-Problem.

4 PROLOG

Diese Kapitel gibt eine Einführung in die Programmiersprache PROLOG. Der Name dieser Sprache widerspiegelt deren Konzept: PROgramming in LOGic.

Grundlage für PROLOG ist die Logik, und zwar eine Teilmenge der Prädikatenlogik 1. Stufe (Abschnitt 2.3): die so genannten Horn-Klauseln (vgl. Seite 60). PROLOG kann als **Wissensrepräsentationssprache** aufgefasst und verwendet werden, da in PROLOG logische Zusammenhänge beschrieben werden. Man kann PROLOG aber auch im Sinne der **regelbasierten** Systeme (Abschnitt 2.4) interpretieren. Logik, logische Schlussfolgerungen lassen sich in PROLOG wesentlich einfacher implementieren als in Python oder Java, schließlich wurde PROLOG – Programming in Logic – genau dafür entwickelt.

PROLOG entstand zu Beginn der 70er Jahre. Mitte der 70er Jahre wurden Konzepte entwickelt, die aus PROLOG eine effiziente Programmiersprache machten. Erste PROLOG-Systeme arbeiteten nur im Interpreter-Modus, heute stehen leistungsstarke Compiler sowie gute Schnittstellen zu anderen Programmiersprachen zur Verfügung. Es gibt eine Reihe von PROLOG-Systemen unter den verschiedenen Betriebssystemen. Die Autoren haben gute Erfahrungen mit SWI-Prolog (*www.swi-prolog.org*) gesammelt. SWI-Prolog ist frei verfügbar, und dies sowohl unter Windows, MAC OS und Linux. PROLOG hat einen kompatiblen Sprachkern. Bei den hier vorgestellten Programmierbeispielen dürfte es nur im Ausnahmefall zu Abweichungen gegenüber anderen PROLOG-Systemen kommen. Systemabhängige Prädikate können im Allgemeinen sehr schnell angepasst werden.

Da im Rahmen dieses Buches nur eine Einführung in PROLOG gegeben werden kann, verweisen wir auf eine Reihe von speziellen PROLOG-Büchern wie [Bra01], [SS94] und [CM13], die für weiterführende Studien zu empfehlen sind.

4.1 Logisches Programmieren

4.1.1 Erste Schritte

Bevor unsere Einführung mit einigen PROLOG-Beispielen beginnt, wird der technische Ablauf einer PROLOG-Programmentwicklung skizziert. Ein typisches Vorgehen sieht wie folgt aus:

1. Wir entwickeln ein PROLOG-Programm, welches das Wissen in Form von **Regeln** und **Fakten** enthält.
2. Dieses wird in einer Datei **gespeichert** und **geladen** oder **kompiliert**.
3. Nun formuliert man in PROLOG **Anfragen** und überprüft, ob sich das Programm wie gewünscht verhält. Dazu werden im Konsole-Fenster nach der Eingabeaufforderung ?- Anfragen gestellt.

4. PROLOG beantwortet unsere Anfragen. Verhält sich das Programm nicht wie gewünscht, so geht man zurück zu Schritt 1 und korrigiert oder erweitert das Programm.

PROLOG-Systeme enthalten Trace- und Debug-Komponenten, so dass man den Ablauf der Abarbeitung verfolgen kann.

Im Gegensatz zu klassischen, prozeduralen oder objektorientierten Programmiersprachen wie Java, C++ oder Python programmiert man in PROLOG in Form von logischen Aussagen, also in Fakten und Zusammenhängen.

Betrachten wir dazu die Aufgabe, alle dreistelligen Zahlen, die durch 5 und 6 teilbar sind und bei der Division durch 9 den Rest 3 liefern, zu finden.

Listing 4.1 Python-Programm für die Zahlensuche

```
for zahl in range(100,1000):
    if zahl % 5 == 0 and zahl % 6 == 0 and zahl % 9 == 3:
        print(zahl)
```

Dies stellt eine Abfolge von auszuführenden Aktionen dar. Man durchläuft alle dreistelligen Zahlen und überprüft für jede, ob sie die geforderten Eigenschaften hat. In PROLOG dagegen sieht die Problemlösung so aus:

Listing 4.2 PROLOG-Programm für die Zahlensuche

```
ziffer(Z) :- member(Z,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]).
gesucht(Zahl) :-
   ziffer(H), H > 0, ziffer(Z), ziffer(E),
   Zahl is H*100 + Z*10 + E,
   0 is Zahl mod 5,
   0 is Zahl mod 6,
   3 is Zahl mod 9.
```

In PROLOG werden nur die Eigenschaften der gesuchten Zahl beschrieben: In der ersten Zeile ist definiert, was eine Ziffer ist. `Z` ist eine Ziffer, falls `Z` ein Element der Liste [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9] ist. Danach wird angegeben, unter welchen Bedingungen eine Zahl unsere Anforderungen erfüllt: Sie muss sich aus drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einer-Ziffer) zusammensetzen, und sie muss die drei Bedingungen bezüglich der Teilbarkeit erfüllen.

Im Gegensatz zum Python-Programm, in dem genau festgelegt wird, wie das Problem gelöst werden soll, reicht in PROLOG die Beschreibung, was zu lösen ist. Dies geschieht dadurch, dass man in PROLOG das Wissen über den Gegenstandsbereich formuliert. Beginnen wir mit einem einfachen PROLOG-Programm:

```
es_regnet.
strasse_nass :- es_regnet.
```

Hier wird gesagt, dass es regnet (1. Aussage). Dies ist ein **Fakt**. In der zweiten Aussage ist formuliert, dass die Straße nass ist, falls es regnet. Das Zeichen :- ist demzufolge zu verstehen als: … *gilt, falls* …. Es handelt sich somit um eine **Regel**.

Es gibt in PROLOG also **Fakten** und **Regeln**, beide nennt man **Klauseln**.

Wie einleitend erläutert, gibt man ein Programm dieser Form (mit Hilfe eines im jeweiligen System integrierten Editors) ein und lädt oder kompiliert es. Nun lassen sich Anfragen stellen:

```
?- strasse_nass.
```

PROLOG wird auf die Anfrage mit `yes` (oder `true`) antworten, da dies nach obigem Programm gilt, wenn `es_regnet` gilt. Und dies wurde von uns als wahr angegeben.

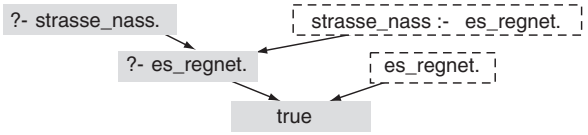


Bild 4.1 PROLOG-Bearbeitung einer Anfrage

Jede Eingabe in PROLOG wird mit einem Punkt abgeschlossen. Dies betrifft sowohl Fakten und Regeln als auch Anfragen. Kommentare werden in PROLOG mittels /* und */ eingeschlossen.

Es wurde bereits im ersten Beispiel angedeutet, dass im Gegensatz zu anweisungsorientierten Programmiersprachen (C, Java) bei der logischen Programmierung nicht im Vordergrund steht, **wie** ein Programm eine Aufgabe löst, sondern die Beschreibung eines Problems. Mit Hilfe der Logik wird beschrieben, **was** gelöst werden soll. Was heißt das? Will man ein Problem lösen, geht man mehrstufig vor. In der ersten Phase wird das Problem analysiert: Es werden grundlegende Charakteristika, Eigenschaften und Zusammenhänge des Problembereiches untersucht. Erst danach beginnt man, einen Lösungsalgorithmus zu erarbeiten. In PROLOG wird im Zuge der Problemanalyse Wissen über den Problembereich herausgearbeitet und in Form von Fakten und Regeln formuliert.

Bei einem prozeduralen Vorgehen wird nach der Analyse des Problems – ausgehend von dieser Problembeschreibung – ein Algorithmus, sprich ein Programm zur Lösung des Problems entwickelt.

Bei PROLOG dagegen ist die Problembeschreibung zugleich das Programm. Der zweite Schritt, das **Wie** der Problemlösung, muss nicht mehr erarbeitet werden.

PROLOG erlaubt auch eine Datenbanksicht. Man kann Programme in PROLOG als eine intelligente Datenbank auffassen. Fakten sind dabei die normalen Datensätze einer Datenbank, Regeln dienen der Verknüpfung von Datensätzen.

Aufgrund dieser Vielfalt der unterschiedlichen Sichtweisen auf diese Sprache eignet sie sich exzellent zum **Rapid Prototyping**. Mit Rapid Prototyping wird die schnelle Entwicklung einer ablauffähigen Software-Lösung bezeichnet. Dabei beschränkt man sich auf wesentliche Funktionalitäten des Systems, um frühzeitig Entwurfsfehler zu erkennen.

4.1.2 Ein Beispiel

Schreibt man eine Einführung in die Sprache PROLOG, ist von Anfang an eigentlich eines klar: Als einführendes Beispiel kommt das Beispiel der Familienwissensbasis nicht in Frage. Damit hätten wir nämlich das $(n+1)$-te Buch, welches dieses Beispiel benutzt. Bei der Vorbereitung des Buchs sucht man dann nach einem geeigneten Beispiel, welches alle Wünsche erfüllt: Das Beispiel soll selbsterklärend, übersichtlich und nachvollziehbar sein. Und natürlich müssen sich alle Konzepte, die man einführen möchte, an diesem Beispiel einfach und plastisch erläutern lassen. Jeder Leser soll das behandelte Fachgebiet aus eigener Erfahrung kennen. Und

plötzlich ist man wieder bei dem guten, alten Familienbeispiel. Lassen Sie sich aber nicht täuschen: PROLOG eignet sich nicht nur zur Erstellung eines Stammbaums.

Im Folgenden werden die grundlegenden Konzepte der logischen Programmierung erläutert. Dabei wird auf die in Bild 4.2 dargestellte Familie zurückgegriffen. Um Zusammenhänge darzustellen, reicht es aus, traditionelle Familienverhältnisse vorausgesetzt, die Beziehungen zwischen Ehepartnern und die Vater-Kind-Beziehung zu nutzen.

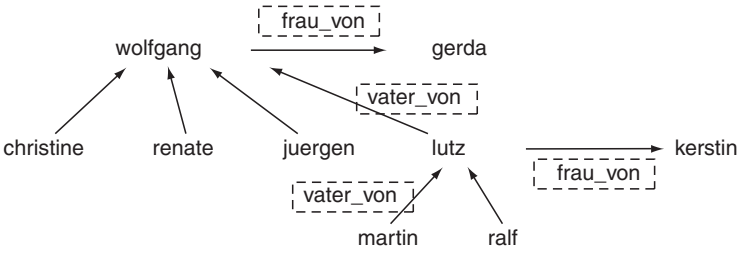


Bild 4.2 Beispiel-Familie

In PROLOG können diese Beziehungen in Form von Fakten aufgeschrieben werden:

```
vater_von(christine, wolfgang).
vater_von(renate, wolfgang).
vater_von(juergen, wolfgang).
vater_von(lutz, wolfgang).
vater_von(martin, lutz).
vater_von(ralf, lutz).
frau_von(wolfgang, gerda).
frau_von(lutz, kerstin).
```

Hier wird im Sinne einer Datenbank spezifiziert, dass `christine` und `wolfgang` in der Beziehung (Relation) `vater_von` stehen. Die Person `wolfgang` ist der Vater von `christine`.

`vater_von` und `frau_von` bezeichnet man als **Prädikate**. Sie werden mit ihrer Stelligkeit, der Anzahl ihrer Argumente, angegeben: `vater_von/2`, `frau_von/2`.

Es können nun hierzu Anfragen gestellt werden, `?-` ist die Eingabeaufforderung:

```
?- vater_von(juergen, wolfgang).
yes
?- vater_von(juergen, renate).
no
```

PROLOG antwortet entsprechend unserer obigen Spezifikation entweder mit `yes` oder `no`. Wie kann man erfahren, wer der Vater von `juergen` ist?

```
?- vater_von(juergen, V).
V = wolfgang
```

In der Anfrage wird eine **Variable** `V` verwendet, die durch PROLOG korrekt mit der Antwort `wolfgang` belegt wird. Variablen beginnen mit einem Groß-, Konstanten mit einem Kleinbuchstaben. Analog kann nach einem Kind von `wolfgang` gefragt werden:

```
?- vater_von(X, wolfgang).
X = christine ;
```

```
X = renate ;
X = juergen ;
X = lutz ;
no
```

PROLOG zählt bei dieser Anfrage alle möglichen Lösungen auf. PROLOG interpretiert diese Anfrage als:

Gibt es ein X, so dass vater_von(X, wolfgang) gilt?

Daraufhin bietet PROLOG die erste gefundene Lösung (`X=christine`) an. Durch Eingabe eines Semikolon kann erzwungen werden, dass nach einer weiteren Lösung gesucht wird.

Durch Fakten haben wir einen Gegenstandsbereich – die Familie – spezifiziert. Anschließend wird durch Anfragen nach der Gültigkeit von Aussagen gefragt. PROLOG antwortet mit `yes` oder `no`. Dabei können Variablen genutzt werden. Stellt man eine Anfrage `?-anfrage(X).`, so versucht PROLOG, die Anfrage zu beweisen, wobei die Variable `X` belegt werden kann. Eine Anfrage, die Variablen enthält, kann interpretiert werden als:

Existiert eine Variablenbelegung, so dass ... gilt?

Bei der Lösungssuche werden **Variablenbelegungen** generiert. Allgemein kann man das Lösungsverhalten von PROLOG wie folgt beschreiben:

Ist Q eine Anfrage und F ein Fakt,
so sucht PROLOG nach einer Variablenbelegung,
so dass Q und F identisch sind.

Man nennt dies eine gemeinsame **Instanz**. Dabei können Variablen sowohl in *Q* als auch in *F* belegt werden. Das bedeutet auch, dass – falls man die Anfrage als Prozeduraufruf und die Fakten als Prozeduren auffasst – die Parameterübergabe vom Aufruf zum Fakt im Sinne eines Mustervergleichs erfolgt.

Variablen können auch in Fakten benutzt werden, allerdings haben sie dann die Bedeutung:

Für jede Belegung von X gilt: ...

Die Aussage `mag(X,bruce_lee)` steht für: Egal wie `X` belegt ist, gilt: Diese Person mag Bruce Lee.

Die Anfrage

```
?- mag(person1, bruce_lee).
```

liefert folglich `yes`. In Fakten sind Variablen allquantifiziert.

4.1.3 Regeln

Stellt man die Anfrage:

```
?- vater_von(juergen, X), vater_von(lutz, X).
```

so antwortet PROLOG `X=wolfgang`.

Hier wird nach einer Variablenbelegung gesucht, so dass sowohl `vater_von(juergen,X)` als auch `vater_von(lutz,X)` gilt. Das Komma steht in PROLOG für das logische UND. Als logische Anfrage gesehen, ist dies zu interpretieren als:

Gibt es eine Variablenbelegung, so dass beide Anfragen gelten?

Betrachtet man die Anfrage operational, so bedeutet sie:

1. Löse erste Anfrage,
2. übernimm die Variablenbindung und
3. versuche unter Beachtung der Variablenbelegung, die zweite Anfrage zu beweisen.

Die Variable `X` wird von beiden Teilanfragen benutzt, beide `X` sind somit identisch. Das bedeutet in der obigen Anfrage, dass die Antwort der ersten Teilanfrage, die Belegung der Variablen `X`, in der zweiten Teilanfrage übernommen wird. Beim Beweis der zweiten Teilanfrage ist `X` keine freie Variable mehr. Man bezeichnet `X` als **gemeinsame Variable (shared variable)**.

Wie können wir nach einem Großvater suchen? Analog der obigen Anfrage nach dem gemeinsamen Vater formuliert man:

```
?- vater_von(ralf, X), vater_von(X, Y).
```

Hier wird `X` wiederum als gemeinsame Variable benutzt. Was bedeutet diese Anfrage? Man sucht nach dem Vater von `ralf` und nach dem Vater von `X`, gesucht ist der Vater des Vaters von `ralf`, also der Großvater väterlicherseits.

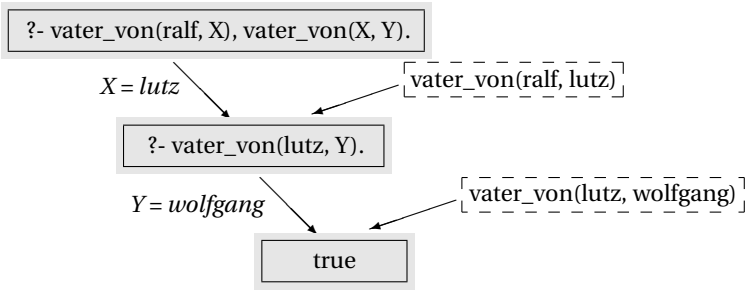


Bild 4.3 Abarbeitung einer kombinierten Anfrage

Diese Beziehung gilt universell, der Vater des Vaters ist immer der Großvater, es liegt somit dieser logische Zusammenhang vor:

Wenn der Vater von X und Y der Vater von Z ist, dann ist Y der Großvater von X.

Diesen Sachverhalt können wir in PROLOG in Form einer Regel notieren:

```
grossvater_von(X, Y) :- vater_von(X, Z), vater_von(Z, Y).
```

Gleichnamige Variablen sind nur innerhalb einer Regel identisch. In einer anderen Regel kann man die Variablen `X`, `Y`, `Z` durchaus wieder verwenden. PROLOG hat ein **lokales Variablenkonzept**. In der Regel für einen Urgroßvater dürfen die Variablen somit erneut eingesetzt werden:

```
urgrossvater_von(X, Y) :- vater_von(X, Z), vater_von(Z, T), vater_von(T, Y).
```

In obiger Regel sind `X`, `Y`, `Z`, `T` Variablen, die beliebig belegt werden können. Die Variablen sind folglich allquantifiziert, somit gilt dieser Zusammenhang für beliebige `X`, `Y`, `Z`, `T`

Die Variable `Z` kann in der Regel für `grossvater_von/2` aus operationaler Sicht als existenzquantifiziert interpretiert werden:

Wenn man nach dem Großvater von X sucht,
sucht man zuerst einen Vater Z und überprüft dann, ob vater_von(Z, Y) gilt.

Die Folgerung (Konklusion) einer Regel wird als **Regelkopf** (**Head**), die Bedingungen als **Regelkörper** (**Body**, **Tail**) der Regel bezeichnet.

Die Eigenschaften wie `vater_von/2` , **frau_von**/2 werden **Prädikate** genannt. Die Struktur: `prädikat(arg1, . . . , argn)` heißt **Literal** (vgl. Definition 2.10 auf Seite 40).

Das Komma zwischen Literalen ist in Regeln als logisches UND zu verstehen. Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass es in PROLOG auch das logische ODER gibt, das durch das Semikolon dargestellt wird.

Tabelle 4.1 PROLOG-Bestandteile

Bezeichnung	Beispiel
Fakt (Klausel ohne Bedingung)	`vater_von(juergen, wolfgang).`
Regel (Klausel mit Bedingung)	`grossvater_von(X, Y) :- vater_von(X, Z), vater_von(Z, Y).`
Regelkopf (Konklusion)	`grossvater_von(X, Y)`
Regelkörper (Bedingungen)	`vater_von(X, Z), vater_von(Z, Y)`
Literal, Teilanfrage	`vater_von(X, Z)`
Prädikat	`vater_von/2`
logisches Und	`,`
logisches Oder	`;`
logische Implikation	`:-`

Der Sinn der Regel für `grossvater_von/2` (Tabelle 4.1) dürfte sich für einen Außenstehenden nicht sofort erschließen. Beherzigt man aber einen Satz, den Faust zu Mephisto spricht:

> „Bei Euch Ihr Herren kann man das Wesen für gewöhnlich aus dem Namen lesen.“,

so sucht man sofort nach einer geeigneteren Wahl der Variablennamen:

```
grossvater_von(Kind, Grossvater) :-
   vater_von(Kind, Vater),
   vater_von(Vater, Grossvater).
```

Wie definieren wir den Großvater mütterlicherseits? Man könnte dies durch eine zweite Regel für Großvater tun:

```
grossvater_von(Kind, Grossvater) :-
   vater_von(Kind, Vater),
   frau_von(Vater, Mutter),
   vater_von(Mutter, Grossvater).
```

Eleganter ist es allerdings, zunächst zu definieren, wer die Eltern sind:

```
eltern_von(Kind, Vater) :-
   vater_von(Kind, Vater).
eltern_von(Kind, Mutter) :-
   mutter_von(Kind, Mutter).
```

Nun können wir den Großvater als Vater eines Elternteils definieren:

```
grossvater_von(Kind, Grossvater) :-
   eltern_von(Kind, E), vater_von(E, Grossvater).
```

Allerdings wird hier vorausgesetzt, dass die Beziehung `mutter_von/2` bereits definiert ist:

```
mutter_von(X, Y) :-
   vater_von(X, Z),
   frau_von(Z, Y).
```

Mit dem Prädikat `mutter_von` haben wir die bisher unvollständige Sicht auf die Familie korrigiert. Denn nun können wir auf `vater_von` und `mutter_von` zurückgreifen, als wenn wir diese Informationen als Fakten vorliegen hätten.

Wir hätten die gesamte Familienwissensbasis auch auf den Fakten über `mutter_von` aufbauen können und den Vater über

```
vater_von(X, Y) :-
   mutter_von(X, Z),
   frau_von(Y, Z).
```

definieren können. Beide Varianten – klassische Verhältnisse vorausgesetzt – sind gleichwertig.

Gegenwärtig wäre ein Entwurf, der allein auf der `kind_von`-Beziehung aufbaut, passender. Denn die Eltern müssen ja nicht verheiratet sein.

```
kind_von(martin, lutz).
kind_von(martin, kerstin).
```

Doch zurück zu den Abfragemöglichkeiten in PROLOG. Man möchte nicht nur die Frage nach dem Großvater, sondern generell nach Vorfahren stellen:

Wann ist eine Person ein Vorfahre einer anderen Person?

Eine Möglichkeit ist, dass man jede Vorgängergeneration als Vorfahren definiert, also die Eltern, Großeltern etc.

```
vorfahre_von(Person, Vorfahre) :-
   eltern_von(Person, Vorfahre).
vorfahre_von(Person, Vorfahre) :-
   eltern_von(Person, X),
   eltern_von(X, Vorfahre).
vorfahre_von(Person, Vorfahre) :-
   eltern_von(Person, X),
   eltern_von(X, Y),
   eltern_von(Y, Vorfahre).
```

Bei diesem Vorgehen wird für jede Generationsebene (Eltern, Großeltern, Urgroßeltern ...) jeweils eine Regel angegeben. Der Nachteil ist offensichtlich: Vorfahren sind nur bis zu einer bestimmten Generation erreichbar.

Eine zweite Möglichkeit ergibt sich aus der Überlegung, dass die Großeltern, die Urgroßeltern usw. alle Vorfahren der Eltern sind. Es kann folglich eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. Der einfache Fall ist mit den Eltern gegeben. Die Eltern sind Vorfahren:

```
vorfahre_von(Person, Vorfahre) :-
   eltern_von(Person, Vorfahre).
```

Alle Vorfahren, die nicht durch die obige Regel erfasst werden, sind die Großeltern, die Urgroßeltern usw. Dies sind aber alle Vorfahren der Eltern. Alle weiteren Vorfahren von Person sind zwingend Vorfahren der Eltern:

```
vorfahre_von(Person, Vorfahre) :-
   eltern_von(Person, X),
   vorfahre_von(X, Vorfahre).
```

Dies ist eine **rekursive** Definition.

Zusammenfassung

- PROLOG-Programme sind Wissensbasen, die aus Klauseln (Fakten und Regeln) bestehen.
- Klauseln bestehen aus einem Kopf und einem Körper (Bedingungen).
- Ist der Körper leer, so ist die Klausel ein Fakt. Ist er nicht leer, ist die Klausel eine logische Regel (Implikation).
- Eine Klausel, die Variablen enthält, ist als logische Regel im Sinne von „Für alle ... gilt: ... “ zu verstehen. Variablen in Fakten und Regeln sind allquantifiziert.
- Variablen in Anfragen sind existenzquantifiziert. Sie stehen für: „Gibt es eine Variablenbelegung, so dass ... gilt?“
- Tritt in einer Regel oder einer Anfrage eine Variable mehrfach auf, so redet man von einer gemeinsamen (shared) Variablen.
- Auch Anfragen können freie Variablen enthalten. PROLOG sucht dann nach Variablenbelegungen, die eine Lösung für die Anfrage darstellen.

Übung 4.1 Anfragen in PROLOG

Formulieren Sie diese Anfragen in PROLOG:

- Wer ist der Vater von `christine`?
- Hat `lutz` Kinder?

Übung 4.2 Familienprädikate

Definieren Sie das Prädikat `hat_kind/1`.

Übung 4.3 Antworten in PROLOG

Wie löst PROLOG diese Anfragen?

```
?- vater_von(juergen, Vater).
?- vater_von(ralf, X), vater_von(X, Y).
?- vater_von(X, ralf).
?- vater_von(X, wolfgang), vater_von(Y, X).
```

Übung 4.4 Familienprädikate

Definieren Sie weitere Prädikate: `bruder_von/2`, `schwester_von/2`, `geschwister_von/2`, `onkel_von/2`, `tante_von/2`. Dazu benötigen wir das Geschlecht der Personen. Entwickeln Sie eine geeignete Darstellung.

Übung 4.5 Familienprädikate

Definieren Sie das Prädikat `nachkomme_von/2`.

Übung 4.6 Gerichteter Graph

Sei ein gerichteter Graph durch seine Kanten gegeben (`edge(a,b)`). Definieren Sie ein 2-stelliges Prädikat `connected/2`, welches `true` liefert, wenn man vom 1. Knoten zum 2. Knoten gelangen kann. Welches Problem tritt hier auf? Wie können Sie es lösen?

Übung 4.7 Datenbankoperationen

Definieren Sie die Grundoperationen der relationalen Datenbank exemplarisch in PROLOG.

Übung 4.8 Kontinente, Länder, Städte

Spezifizieren Sie die Zusammenhänge zwischen Kontinenten, Ländern, Hauptstädten. Stellen Sie anschließend Anfragen. Ist Rom die Hauptstadt von Italien? Welche Hauptstadt haben die USA?

4.2 PROLOG-Programme

4.2.1 Lösungsfindung mittels Backtracking

Aus den bisherigen Beispielen ist ersichtlich, dass eine PROLOG-Anfrage einen Prozess aktiviert, der versucht, aus dem vorhandenen Wissen die Gültigkeit einer Anfrage zu beweisen. Dabei können Variablen belegt werden.

Gelingt der Beweis mit einer Regel nicht, so wird nach einer weiteren anwendbaren Regel gesucht. Der Prozess des Zurückgehens wird als **Backtracking** bezeichnet. Dabei werden Variablenbindungen wieder gelöst, die durch die Anwendung der Regel, die sich als nicht erfolgreich erwiesen hat, entstanden sind.

Wir veranschaulichen dies am Familienbeispiel. Wie löst PROLOG die folgende Anfrage?

```
?- vater_von(X, wolfgang), vater_von(ralf, X).
```

Wir beziehen uns auf die bereits vorgestellte Familie:

```
vater_von(christine, wolfgang).
vater_von(renate, wolfgang).
vater_von(juergen, wolfgang).
vater_von(lutz, wolfgang).
vater_von(martin, lutz).
vater_von(ralf, lutz).
frau_von(wolfgang, gerda).
frau_von(lutz, kerstin).
```

PROLOG findet die Antwort `X=lutz`. PROLOG bearbeitet zunächst die erste Teilanfrage und generiert `X=christine`.

```
?- vater_von(X,wolfgang), vater_von(ralf,X).
   X = christine
```

Mit dieser Variablenbelegung wird die 2. Teilanfrage bearbeitet:

```
?- vater_von(christine, wolfgang), vater_von(ralf,christine).
```

Dies gelingt nicht. Deshalb geht PROLOG zurück (Backtracking) und sucht nach einer alternativen Lösung für die erste Teilanfrage. Dabei wird die Variablenbindung `X=christine` wieder gelöst:

```
?- vater_von(X,wolfgang), vater_von(ralf,X).
```

Lösen der Variablenbindung `X=christine`

PROLOG generiert nun die Variablenbelegungen `X=renate`. Die Anfrage `vater_von(ralf, renate)` scheitert. Wieder geht PROLOG zurück und sucht nach einer weiteren Lösung für `vater_von(X,wolfgang)`. Die nächste Lösung `X=juergen` führt bei der zweiten Teilanfrage ebenfalls nicht zum Erfolg. Erst mit der vierten Lösung (`X=lutz`) gelingt dann auch der Beweis der zweiten Teilanfrage.

PROLOG merkt sich bei der Abarbeitung alternative Lösungswege. Scheitert der Beweis einer Teilanfrage, geht PROLOG zurück und probiert alternative Wege. Das Bild 4.4 veranschaulicht das Backtracking. Die Kanten sind durch die jeweils verwendete Klausel gekennzeichnet. Zu bearbeiten ist die Anfrage:

```
?- vorfahre_von(ralf, wolfgang).
```

PROLOG benutzt zur Lösungsfindung die erste passende Klausel. Weitere in Frage kommende Klauseln werden erst dann verwendet, wenn die gerade gewählte Klausel scheitert und kein Beweis mit ihr möglich ist. Dieses Vorgehen entspricht dem im Abschnitt 3.2 vorgestellten Verfahren der Tiefensuche.

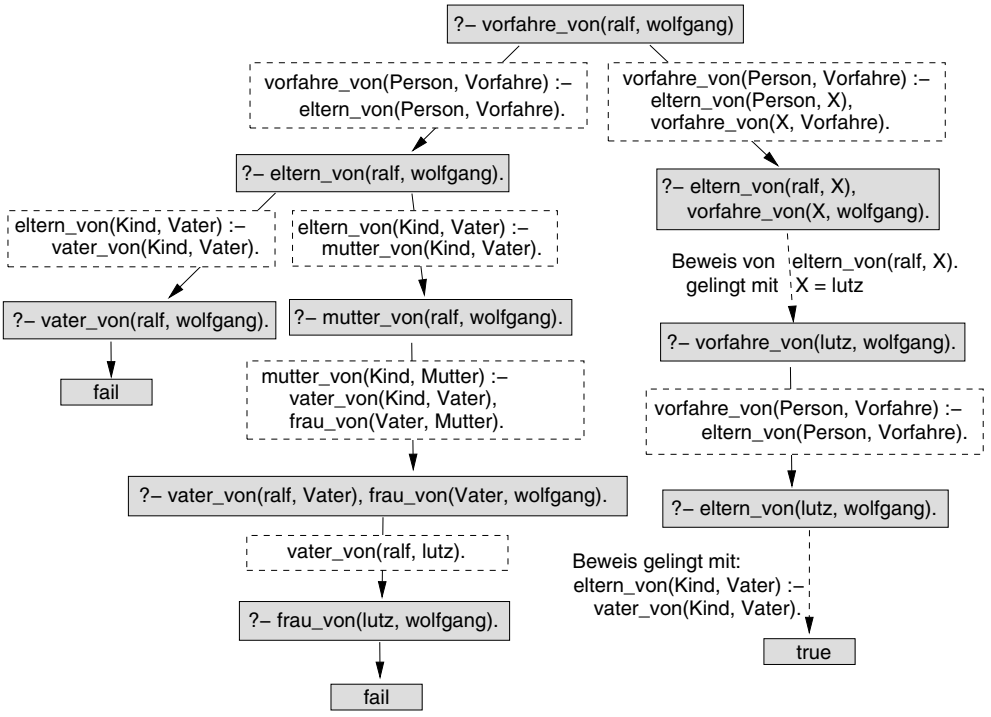


Bild 4.4 Backtracking bei der Bearbeitung der Anfrage `?- vorfahre_von(ralf,wolfgang).`

4.2.2 Parameterübergabe mittels Unifikation

An den bisherigen Beispielen ist ersichtlich, dass Variablen und Konstanten sowohl in Anfragen als auch in Fakten oder Regeln benutzt werden können. Fasst man eine Anfrage als Aufruf und einen Regelkopf als Prozedurkopf auf, so bedeutet die beliebige Verwendbarkeit von Variablen und Konstanten, dass in PROLOG offensichtlich ein anderes Übergabekonzept für Parameter als in Programmiersprachen wie C oder Java verwendet wird.

Die **Parameterübergabe** wird in PROLOG im Sinne eines **Mustervergleichs** realisiert. Die Anfrage:

```
?- vater_von(juergen, Vater).
```

kann mit Hilfe des gegebenen Faktes

```
vater_von(juergen, wolfgang).
```

erfolgreich bearbeitet werden. PROLOG vergleicht dabei die Parameter. Der erste Parameter `juergen` ist identisch in der Anfrage und dem Fakt. Den zweiten Parameter der Anfrage (Variable `Vater`) kann man auf den zweiten Parameter des Faktes (Konstante `wolfgang`) passend machen. Dazu wird die Variable `Vater` mit dem Wert `wolfgang` belegt. Die Antwort, die PROLOG auf die Anfrage gibt,

```
Vater = wolfgang
```

ist somit wie folgt zu interpretieren:

Die Anfrage kann erfolgreich bearbeitet werden,
dazu muss die Variable `Vater` *mit dem Wert* `wolfgang` *belegt werden.*

Die Anfrage

```
?- mutter_von(juergen, Mutter).
```

wird mit der Regel

```
mutter_von(X, Y) :-
   vater_von(X, Z),
   frau_von(Z, Y).
```

bearbeitet. Dabei wird zunächst überprüft, ob die Anfrage auf den Kopf der Regel passt. Dies ist der Fall. Dabei müssen die **Variablenbindungen**

`Mutter = Y` sowie `X = juergen`

gebildet werden. Bei der Abarbeitung der beiden Bedingungen entstehen diese Variablenbindungen:

`Z = wolfgang  Y = gerda`

Achtung, durch die Variablenbindung `Y=gerda` bekommt auch die Variable `Mutter` den Wert `gerda`, da die Variablen `Mutter` und `Y` zu diesem Zeitpunkt bereits identisch sind.

Dieser Mustervergleich, bei dem Variablen belegt werden können, heißt **Unifikation** (etwas „Gleichmachen“) (vgl. Abschnitt 2.3.1). Unifikation kann auf Paare von beliebigen Objekten angewendet werden. Seien zwei Objekte (Terme) T_1 und T_2 gegeben, dann untersucht Unifikation die Frage, ob eine **Variablensubstitution** s existiert, so dass gilt:

$s(T_1) == s(T_2)$

Unifikation sucht nach einer Belegung der Variablen, so dass beide Objekte danach identisch sind. In PROLOG steht = für die Unifikation. Mit == wird in PROLOG die Identität bezeichnet.

Die Variablensubstitution *s* wird auch **Unifikator** genannt. Die Unifikation wird nicht nur bei der Parameterübergabe verwendet, man kann sie auch explizit aktivieren. Die Anfrage

```
?- g(X,f(1)) = g(a,Y).
```

ist die Frage, ob sich die beiden angegebenen Objekte unifizieren lassen. Als Antwort erhält man:

```
X = a
Y = f(1)
```

Die Antwort ist zu interpretieren als: Beide Objekte können unifiziert werden, indem die obigen Variablenbindungen gebildet werden.

Das Gleichheitszeichen hat in PROLOG eine andere Bedeutung als in vielen Programmiersprachen, wo das Gleichheitszeichen für die Ergibtanweisung oder für den Test auf Gleichheit von Objekten genutzt wird.

Was passiert bei der Anfrage:

```
?- X = 4 + 1.
```

Man könnte vermuten, dass wie in vielen Programmiersprachen die Antwort `X=5` gegeben wird. Das besprochene „Gleichmachen“ von `X` und `4 + 1` führt aber nur zur simplen Antwort:

```
X = 4+1
```

PROLOG beantwortet deshalb die folgende Anfrage mit `no`:

```
?- 1 + 4 = 4 + 1.
no
```

Diese Anfrage bestätigt, dass Unifikation nur testet, ob sich die beiden Objekte „gleichmachen“ lassen. Die einzige Freiheit, die man dabei hat, ist das Belegen von Variablen. Es spielt für die Unifikation keine Rolle, dass man sowohl `4+1` als auch `1+4` zu `5` auswerten könnte und somit beide Ausdrücke gleich wären.

Die Auswertung arithmetischer Ausdrücke muss explizit veranlasst werden. Dafür steht in PROLOG das `is/2`-Prädikat zur Verfügung:

`X is <ausdruck>` steht für:

Werte den arithmetischen Ausdruck <ausdruck> aus und unifiziere das Resultat mit X.

Nun kann überprüft werden, ob `5` und `4+1` gleich sind:

```
?- 5 is 4 + 1.
yes
```

PROLOG wertet zunächst die rechte Seite als arithmetischen Ausdruck aus und vergleicht dann per Unifikation mit der linken Seite. Demnach kann man mit `is/2` Variablen belegen:

```
?- X is 4 + 1.
X=5
```

Damit kann auch überprüft werden, ob $1+4=4+1$ im mathematischen Sinn gilt:

```
?- X is 1 + 4, Y is 4 + 1, X == Y.
X = Y = 5
```

Es wird `1+4` zu `5` ausgewertet, `X` mit diesem Wert belegt. Dann wird `4+1` zu `5` ausgewertet und `Y` mit diesem Wert belegt. Anschließend wird getestet, ob `X` und `Y` identisch sind.

In PROLOG wird nur die schwächste, sprich die allgemeinste Variablensubstitution gesucht (**most general unifier**). Eine schwächste Variablensubstitution zeichnet sich dadurch aus, dass sie gerade so viele Variablen wie nötig belegt.

Für die Anfrage:

```
?- zeit(Min, 50) = zeit(Min1, Sek).
```

wäre diese Variablenbelegung eine mögliche Lösung:

```
Min = Min1 = 3, Sek = 50
```

Diese Antwort ist jedoch schon viel zu konkret. PROLOG überprüft, ob beide Objekte unifizierbar sind. Die beiden Funktoren sind identisch (`zeit`). Die jeweils ersten Parameter lassen sich aufeinander anpassen, dazu müssen beide Variablen gleich gesetzt werden (`Min=Min1`). Die zweiten Parameter passen ebenfalls aufeinander, dazu bekommt die Variable `Sek` den Wert `50`. Die von PROLOG gegebene Antwort lautet:

```
Min = Min1, Sek = 50
```

Der schwächste Unifikator ist dadurch ausgezeichnet, dass sich jeder beliebige Unifikator aus ihm ableiten lässt. In unserem Beispiel lässt sich der Unifikator `Min/3`, `Min1/3`, `Sek/50` aus dem allgemeinsten Unifikator `Min/Min1`, `Sek/50` dadurch erzeugen, indem man auf den schwächsten Unifikator die Substitution `Min/3` anwendet.

Das folgende Beispiel veranschaulicht den Unterschied zwischen Identität und Unifikation.

```
?- X == 4.          ?- X = 4.
no                  X = 4
```

In der linken Anfrage wird überprüft, ob die freie Variable `X` und die Konstante `4` identisch sind, dies ist nicht der Fall. In der rechten Anfrage wird geprüft, ob `X` und `4` unifizierbar sind. Dies ist möglich, wobei die Variablenbindung `X/4` entsteht.

```
?- X = 4, X == 4.
X = 4
```

Wieso antwortet PROLOG `X=4`? Die erste Teilanfrage ist erfolgreich, Unifikation ist möglich. Dabei entsteht die Variablenbindung `X=4`. Bei der zweiten Teilanfrage ist die Variable `X` nun keine freie Variable mehr. Sie hat bereits den Wert 4. Deshalb ist auch die zweite Teilanfrage `4==4` erfolgreich.

Die Unifikation stellt die einzige Möglichkeit in PROLOG dar, einer Variablen einen Wert zuzuweisen. Eine Anweisung wie `X := X + 1` ist in vielen Programmiersprachen möglich. Zunächst wird `X+1` ausgerechnet. Dieser Wert wird `X` als neuer Wert zugewiesen. Eine derartige Anweisung steht in PROLOG nicht zur Verfügung. Hat eine Variable einmal einen Wert bekommen, so kann man diesen Wert nicht verändern. Die Anfragen

```
?- X = 4, X = 5.
no
?- X is 4, X is 5.
no
```

sind beide nicht erfolgreich, da `X` – einmal belegt – nicht eine neue Belegung bekommen kann. Dies ist keine willkürliche Einschränkung. Dass eine Variable nur einen Wert bekommen kann, folgt unmittelbar aus dem zugrunde liegenden mathematisch-logischen Konzept. Eine mathematisch-logische Variable kann stets nur einen Wert annehmen und diesen auch nicht wieder wechseln.

Für den fortgeschrittenen Leser seien die **Regeln für die Unifikation** angegeben. Wie untersucht PROLOG die Anfrage `?- S = T ?`

1. Sind `S` und `T` Konstanten, dann muss gelten: `S == T`.
2. Sind `S` oder `T` Variablen, so wird `S` mit `T` instantiiert (oder umgekehrt).
3. Sind `S` und `T` zwei Strukturen, `S : f(s1, s2, ... , sn)`, `T : g(t1, t2, ... , tm)`. Dann muss gelten: `f == g, n == m, si = ti für alle i=1, . . . ,n`.

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass die zweite Regel in dieser Form nicht vollständig korrekt ist. Die Anfrage:

```
?- X = f(X).
```

müsste gemäß Regel 2 zu einer Variablensubstitution

```
X = f(X)
```

führen. Dies ist aber nicht korrekt, da auch auf der rechten Seite die Variable `X` ersetzt werden muss. Die korrekte Lösung ist gegeben durch:

```
X = f(f( ... f(f(X)) .... ))
```

Die Punkte stehen hier für unendlich viele `f`, `X` muss also einen unendlich großen Term als Wert bekommen. Da diese Lösung aber nur von theoretischem Interesse ist, verbieten die meisten PROLOG-Systeme eine solche Lösung. In der Regel 2 ist deshalb der sogenannte **Occur-Check** erforderlich: Ist `S` eine freie Variable, so darf `S` mit `T` nur dann belegt werden, wenn die Variable `S` nicht in `T` vorkommt.

4.2.3 Interpretation von Programmen

Arbeitet man mit Programmiersprachen, ist eine essentielle Frage, welche Bedeutung diese Programme haben. Wie ist ein Programm zu interpretieren?

In dem einführenden Python-Beispiel (siehe Abschnitt 4.1.1) ist die FOR-Anweisung zu interpretieren als: Für jede Zahl von 100 bis 999 prüfe, ob die Bedingungen erfüllt sind. Falls ja, gib die Zahl aus.

Was bedeutet nun in PROLOG die Regel:

```
vorfahre_von(Person,Vorfahre) :-
   eltern_von(Person,Vorfahre).
```

Es gibt in PROLOG zwei mögliche Sichtweisen auf die Bedeutung von Programmen. Zum einen kann man PROLOG-Fakten und -Regeln als logische Zusammenhänge interpretieren. Zum anderen ist es möglich, PROLOG als eine rein prozedurale Programmiersprache aufzufassen. Der wichtigere Aspekt im Rahmen dieses Kapitels ist die logische Sicht, das heißt die Fähigkeit von PROLOG, mit logischen Zusammenhängen umzugehen. Manchmal – insbesondere hinsichtlich der Abarbeitung – ist die prozedurale Sicht erforderlich. Beide Möglichkeiten der Interpretation von PROLOG-Programmen werden hier behandelt.

Logische Interpretation

Sei

```
Kopf :- K1, K2, K3, ... , Kn .
```

eine PROLOG-Regel. Diese Regel kann interpretiert werden als:

Kopf gilt, falls K1 und K2 und ... und Kn gelten.

Oder: Aus der Gültigkeit von `K1` und `K2` und ... und `Kn` folgt die Gültigkeit von Kopf.

Aus logischer Sicht ist die Abarbeitung in PROLOG wie folgt zu interpretieren:

Ein Ziel `Z` ist wahr, wenn

- eine Klausel `C` existiert, deren `Kopf` und `Z` sich mittels einer geeigneten Variablensubstitution *s* unifizieren lassen, und
- sich alle Literale des Körpers von `C` beweisen lassen, wobei die Variablensubstitution *s* zu beachten ist.

Diese logische Sicht ist eine **deklarative** Sicht.

Prozedurale Interpretation

Bei der prozeduralen Sichtweise wird eine Regel

```
Kopf :- K1, K2, K3, ... , Kn .
```

als Prozedurbeschreibung betrachtet. Soll ein Ziel `Z` bewiesen werden, welches auf Kopf passt, so wird dies als Prozeduraufruf gesehen. Der Aufruf der Prozedur `Kopf` veranlasst dann die Abarbeitung des Prozedurkörpers, hier die Folge der Prozeduraufrufe

```
K1, K2 .... Kn.
```

Wird die Prozedur `Kopf` aktiviert, so aktiviert diese die Prozeduren `K1`, `K2` ... `Kn` in dieser Reihenfolge. Ist der Regelkörper leer, so ist die Prozedur abgearbeitet. Auch hier müssen die durch Unifikation entstandenen Variablenbelegungen weitergegeben werden.

Übung 4.9 Unifikation und Identität

Was antwortet PROLOG auf die folgenden Anfragen? Begründen Sie Ihre Vermutung.

```
?- punkt(X,Y) = punkt(1,2).
?- punkt(X,Y) == punkt(1,2).
?- punkt(X,Y) = punkt(1,2,3).
?- plus(1,1) = 2.
?- X = 5, Y is X+4.
?- X = 1+4, Y is X.
```

Übung 4.10 Occur-Check

Überprüfen Sie, wie sich Ihr PROLOG-System bei der Anfrage `?- X=f(X)` verhält.

4.3 Datentypen und Arithmetik

In den vorherigen Abschnitten sind wir auf die Struktur von PROLOG-Programmen und auf Aspekte der Abarbeitung eingegangen. Als Datentypen wurden bisher nur Variablen und Konstanten betrachtet. Weitere Datentypen werden in diesem Abschnitt erläutert. Insbesondere wird auf den Datentyp `Liste` eingegangen.

4.3.1 Einfache und zusammengesetzte Datentypen

Die Hierarchie der in PROLOG verfügbaren Datentypen zeigt das Bild 4.5.

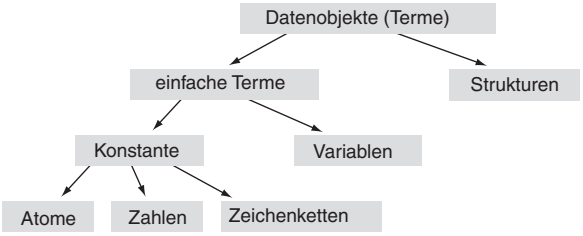


Bild 4.5 Datentypen in PROLOG

Atome sind durch diese Eigenschaften charakterisiert:

- Folge von Zeichen beginnend mit einem Kleinbuchstaben: `ralf`, `a320`, `ein_Buch`
- spezielle Zeichen wie ==, =
- Folge von Zeichen, eingeschlossen in Apostroph: `'Hallo'`

Als **Zahlen erlaubt** PROLOG integer und float (-1, 1, -8.23). Die Zahlenbereiche können von System zu System variieren.

Zeichenketten sind beliebige Folgen von Zeichen, die durch " eingeschlossen sind: `"Das ist eine Zeichenkette"`.

Im Standard-PROLOG wird dies als abkürzende Schreibweise für die Liste der ASCII-Codierungen behandelt: `"Hallo" == [72,97,108,108,111]`. Da Zeichenketten sehr häufig zu bearbeiten sind und eine effiziente Behandlung notwendig ist, bieten viele PROLOG-Systeme einen eigenen Mechanismus an: In SWI-Prolog können Standard-Zeichenketten (Listen) oder auch Atome in den speziellen Datentyp *string* umgewandelt werden. Für diesen stehen dann spezielle Methoden für die Bearbeitung zur Verfügung.

PROLOG kennt zwei Typen von **Variablen**:

- Zeichenfolge beginnend mit einem Großbuchstaben oder einem Unterstrich: **_ab**, **Vater**, **X2**
- die anonyme Variable, die nur durch einen Unterstrich bezeichnet wird: _

Die erste Klasse von Variablen nennt man benannte Variablen. Die anonyme Variable unterscheidet sich von den anderen Variablen insofern, als dass sie nie einen Wert bekommt. Auf die anonyme Variable „passt alles“. Man benutzt sie, um hervorzuheben, dass ein Parameter

keine Rolle spielt. Man kann innerhalb einer Regel die anonyme Variable mehrfach benutzen, ohne dass sie – wie bei den benannten Variablen – als gleich angesehen werden.

Will man wissen, ob `lutz` ein Kind hat, kann man fragen:

```
?- vater_von(_, lutz).
```

Es wird keine Variablenbindung als Antwort gegeben. Man bekommt nur die Antwort `yes` oder `no`.

Mittels **Strukturen** können komplexe Daten modelliert werden:

```
funktor(K1, K2, ... , Kn).
```

Die `Ki` können dabei wieder beliebige Objekte sein. Eine Struktur ist beispielsweise

```
person(wagner, richard, geburtstag(22, 'Mai', 1813))
```

Man bezeichnet `person` und `geburtstag` als **Funktor** mit der Stelligkeit (Arität) von jeweils 3.

Wir illustrieren die Verwendung von Datenstrukturen anhand des folgenden Beispiels.

Es werden geometrische Objekte in der Ebene mit ihren Eigenschaften betrachtet. Um ein Viereck zu charakterisieren, genügt die Angabe der X- und Y-Koordinaten der 4 Eckpunkte. Will man ein Viereck mit den Punkten (0,0), (1,0), (1,1) und (0,2) darstellen, so kann man folgende Notation wählen:

```
viereck(0,0,1,0,1,1,0,2)
```

Dies ist nicht gut lesbar, deshalb gibt es – wie in anderen Programmiersprachen – die Möglichkeit, Objekte zu einem gemeinsamen Objekt zusammenzufassen. In Java wird man eine Klasse entwerfen, und in PROLOG nimmt man Strukturen. Für eine Gerade in der Ebene bietet sich folgende Darstellung an:

```
gerade(punkt(X1,Y1), punkt(X2, Y2))
```

Es kann nun in verständlicherer Form ausgedrückt werden, wann ein Objekt eine horizontale Gerade ist. Die entscheidende Eigenschaft ist, dass die Y-Koordinaten gleich sind:

```
horizontal(Objekt) :-
   Objekt = gerade(Punkt1, Punkt2),
   Punkt1 = punkt(X1, Y1),
   Punkt2 = punkt(X2, Y2),
   Y1 = Y2.
```

Im vorigen Abschnitt haben wir die Unifikation als Parameterübergabe eingeführt. Da in obiger Regel im Bedingungsteil nur Unifizierbarkeit überprüft wird, kann man dies direkt in den Regelkopf verlagern. Die Definition von vertikalen und horizontalen Geraden kann folglich vereinfacht werden. Die Unifikation übernimmt hier sowohl den Test, ob es sich um eine Gerade handelt, als auch die Überprüfung, ob die Punkte die gleichen Y- oder X-Koordinaten haben:

```
horizontal(gerade(punkt( _ , Y), punkt( _ , Y))).
vertikal(gerade(punkt(X, _ ), punkt(X, _ ))).
```

Folgende Fragen mit den dazugehörigen Antworten veranschaulichen das Verhalten:

```
?- vertikal(gerade(punkt(1, 1), punkt(1, 2))).
yes
?- horizontal(gerade(punkt(2, 2), P)).
P = punkt( _ , 2)
```

Die zweite Anfrage generiert mittels Unifikation einen Punkt, so dass die Gerade horizontal ist. Die Antwort sagt, dass der zweite Punkt der Geraden als Y-Koordinate eine 2 haben muss. Hier ist noch eine Unkorrektheit enthalten, da wir den Punkt (2,2) als mögliche Antwort ausschließen müssen. Die nächste Anfrage bestätigt diesen Fehler:

```
?- vertikal(G), horizontal(G).
G = gerade(punkt(X, Y), punkt(X, Y))
```

Es wird nach einem Objekt gefragt, welches zugleich vertikal und horizontal ist. Dies wird durch die „Gerade“ erfüllt, die durch zwei identische Punkte definiert ist. Um dies auszuschließen, wird eine zusätzliche Regel eingeführt, die definiert, wann ein Objekt eine Gerade ist:

```
ist_gerade(gerade(punkt(X1, Y1), punkt(X2, Y2))) :-
   [X1,Y1] \== [X2,Y2].
```

Dieses Prädikat `ist_gerade/1` kann in den entsprechenden Anfragen oder Regeln genutzt werden.

Fakten und Regeln in PROLOG fügen sich in das Konzept ein, denn sie sind ebenfalls Strukturen.

Der Fakt

```
vater_von(juergen, wolfgang)
```

ist eine 2-stellige Struktur. Die Regel

```
eltern_von(Kind,Eltern) :- vater_von(Kind,Eltern).
```

ist auch eine Struktur, die sich aus dem Funktor `:-` mit der Stelligkeit 2 und zwei Komponenten zusammensetzt. Beide Komponenten sind selbst wieder Strukturen, so dass folgende Schreibweise der Regel ebenso möglich ist.

```
:- (eltern_von(Kind, Eltern), vater_von(Kind, Eltern))
```

4.3.2 Listen

Der Datentyp **Liste** ist vordefiniert. Listen sind im Sinne von PROLOG spezielle, dynamische Strukturen. Die Länge einer Liste – die Anzahl der Elemente – kann zur Laufzeit verändert werden. Es lassen sich Elemente dynamisch hinzufügen, entfernen oder austauschen.

Eine Liste kann mittels Aufzählung der Elemente dargestellt werden: [1,2,3,4,5]. Die Elemente einer Liste werden durch eckige Klammern eingeschlossen. Als Trennzeichen wird das Komma verwendet.

Darüber hinaus steht der so genannte **Restlistenoperator** `|` zur Verfügung, mit dessen Hilfe man Listen auf unterschiedliche Art und Weise darstellen kann.

Diese Listen sind identisch: `[a,b,c] == [a|[b,c]] == [a,b|[c]] == [a,b,c|[ ]]`.

Der Restlistenoperator trennt führende Elemente von der so genannten *Restliste*, die alle restlichen Elemente der Liste enthält. Links vom Restlistenoperator `|` stehen folglich immer ein oder mehrere Elemente, rechts steht immer eine Liste. Dies kann man bei der Unifikation ausnutzen. Bei der Anfrage

```
?- [a,b,c,d,e] = [X|Y]
X = a, Y = [b,c,d,e]
```

wird mittels Unifikation ein Mustervergleich durchgeführt. `X` wird mit dem führenden Element der Liste belegt, `Y` bekommt die entsprechende Restliste zugewiesen. Die Anfrage

```
?- [a,b,c,d,e] = [a,b|X]
```

wird von PROLOG analog mit `X = [c,d,e]` beantwortet.

Im Folgenden werden Regeln für einige typische Listenbeziehungen aufgeführt und erläutert.

Die Frage, ob ein Objekt in einer Liste enthalten ist, lässt sich in den meisten PROLOG-Systemen mittels eines vordefinierten Prädikats `member/2` beantworten. Zur Veranschaulichung des Umgangs mit Listen definieren wir diese Beziehung mit Hilfe zweier Regeln. Unser eigenes Prädikat wird `element/2` genannt.

Im Prinzip läuft die Untersuchung, ob ein Objekt in einer Liste enthalten ist, auf Rekursion hinaus.

1. Der einfache Fall ist dadurch gegeben, dass das gesuchte Objekt gerade das erste Element der Liste ist:

   ```
   element(X, [X| _ ]).
   ```

   Die restlichen Elemente der Liste sind hier unwesentlich, weshalb man die Restliste mit der anonymen Variablen besetzt.
2. Ist das gesuchte Objekt nicht das führende Element der Liste, so muss es in der Restliste enthalten sein.

   ```
   element(X, [ _ |Y]) :- element(X, Y).
   ```

Aus Rekursionssicht ist Fall 1 das Rekursionsende, Fall 2 der rekursive Aufruf.

Anhand der beiden Sichtweisen auf PROLOG-Programme kann man `element/2` unterschiedlich interpretieren. Die deklarative Sichtweise besagt:

1. Jede Liste, die als führendes Element das gesuchte Objekt `X` enthält, erfüllt die Beziehung `element/2`.
2. Erfüllt eine Liste `Y` die Beziehung `element(X,Y)`, so erfüllt auch jede um ein Element erweiterte Liste diese Beziehung.

Operational gesehen besagen die beiden Klauseln:

1. Untersuche, ob das gesuchte Element das führende der Liste ist.
2. Untersuche, ob das gesuchte Element in der Restliste enthalten ist.

Ein weiteres, häufig benutztes Prädikat ist das Verbinden von Listen zu einer gemeinsamen Liste. Dieses ist ebenso in vielen PROLOG-Systemen als `append/3` bereits vordefiniert.

```
append([ ], L, L).
append([H|T], L, [H|M]) :- append(T, L, M).
```

Die Anfrage

```
?- append([1,2,3], [4,5,6], Liste).
```

liefert die korrekte Antwort

```
Liste = [1,2,3,4,5,6]
```

Wie kann man `append/3` interpretieren? Dazu betrachtet man die beiden zu verknüpfenden Listen als gegeben, auf dem dritten Parameter wird die Resultatsliste zurückgegeben.

1. Wird an die leere Liste eine beliebige Liste `L` angehängt, so ergibt sich diese Liste `L`.
2. Ist die erste Liste nicht leer, so merken wir uns das führende Element `H`, verknüpfen rekursiv die Restliste `T` und die zweite Liste `L`. Dies liefert als Resultat die Liste `M`. Nun muss vor `M` nur noch das gemerkte Element `H` gestellt werden (Bild 4.6).

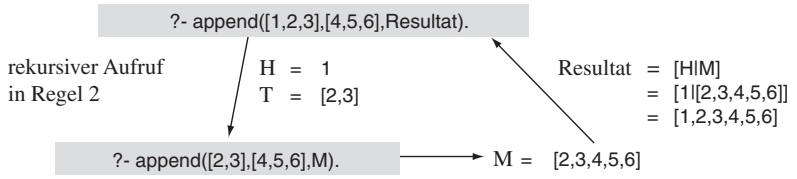


Bild 4.6 Das append-Prädikat

Wir können uns von der ursprünglichen Aufgabe lösen, zwei gegebene Listen zu verknüpfen, und folgende Anfrage stellen:

```
?- append([1|R1], [5|R2], [1,3,5,7]).
```

Dabei wird gefragt, ob sich die Liste [1,3,5,7] in zwei Listen teilen lässt, so dass die erste Liste mit einer 1 beginnt, die zweite mit einer 5.

PROLOG liefert auf die Anfrage die Antwort für die entsprechenden Restlisten:

```
R1 = [3]
R2 = [7]
```

Das Prädikat append/3 kann also nicht nur zur Verknüpfung von zwei Listen verwendet werden, sondern auch zur Teilung einer Liste oder zur Differenzbildung von Listen:

```
?- append(L1,  L2,     [1,2,3]).
L1 = [ ]      L2 = [1,2,3] ;
L1 = [1]      L2 = [2,3] ;
L1 = [1,2]    L2 = [3] ;
L1 = [1,2,3]  L2 = [ ] ;
no
```

Wieso haben wir mehr programmiert, als wir eigentlich wollten? Kehren wir dazu zur Interpretation der beiden Regeln zurück und betrachten die logische oder deklarative Sicht:

Die erste Regel besagt: Lässt sich der erste Parameter mit der leeren Liste unifizieren und lassen sich der zweite und dritte Parameter unifizieren, so ist append erfüllt.

Die zweite Regel wird als logische Implikation betrachtet: Sind `T`, `L` und `M` drei Listen, die in der Beziehung append/3 stehen, `T` und `L` ergeben `M`, so gilt die Beziehung append/3 auch für die Listen `[H|T]`, `L` und `[H|M]`.

Oder: Eine Liste `L` an eine Liste `[H|T]` anzuhängen, gelingt, falls die Listen `T` und `L` die Liste `M` ergeben. Die kombinierte Liste ist `[H|M]`.

Die deklarative Sichtweise ist mächtiger, löst sie sich doch von der rein algorithmischen Abarbeitung.

Für eine weitere Standardaufgabe – das Löschen eines Elements aus einer Liste – kann `element/2` als Vorlage benutzt werden. `delete/3` ist ebenfalls in vielen PROLOG-Systemen, meistens als `remove/3`, vordefiniert:

```
delete(X, [X|T], T).
delete(X, [Y|T], [Y|U]) :- delete(X, T, U).
```

Schaut man sich Anfragen für `element/2` und `delete/3` an, sieht man, dass wir auch bei diesen Prädikaten mehr programmiert haben, als eigentlich vorgesehen war:

```
?- element(X,[1,2,3]).
X = 1 ;
X = 2 ;
X = 3 ;
no
```

```
?- delete(X,[1,2,3],Rest).
X = 1  Rest = [2,3] ;
X = 2  Rest = [1,3] ;
X = 3  Rest = [1,2] ;
no
```

Alle drei Prädikate können also auch zum Generieren von Lösungen eingesetzt werden. Dies ist für die Lösung von KI-Problemen von großem Vorteil, da mit Hilfe dieser Prädikate sukzessive Lösungsvorschläge generiert werden können. Betrachten Sie beispielsweise die Lösung des Damenproblems in Abschnitt 4.6.3.

Am Beispiel von `append/3` erkennt man die Vielfalt der möglichen Anfragen. Man kann sowohl das Verknüpfen von Listen als auch die Listendifferenz berechnen. Darüber hinaus ist `append/3` häufig als Hilfsfunktion sehr nützlich. Ein Prädikat, welches ein einziges Element an eine Liste anhängt, können wir nun leicht formulieren. Wir betrachten das Objekt als Element einer Liste:

```
el_append(Element, Liste, ListeNeu) :- append(Liste, [Element], ListeNeu).
```

Auch das Überprüfen, ob eine Liste `L1` als Teilliste in einer Liste `L2` – `[2,3,4]` ist in der Liste `[1,2,3,4,5,6]` enthalten – vorkommt, lässt sich damit elegant lösen:

```
enthalten(Liste, Superliste) :-
   append(L1, L2, Superliste),
   append(Liste, L3, L2).
```

Das Prädikat `append/3` hat einen linearen Aufwand bezüglich der Länge der ersten Liste. Das Anhängen eines Elements an eine Liste ist relativ aufwendig. Eleganter ist das Einfügen eines Elements an den Anfang einer Liste:

```
el_add(Element, Liste, [Element | Liste]).
```

Da man die führenden Elemente einer Liste einfach erreicht, lässt sich für die Arbeit mit Listen ein Grundmuster angeben: Im Allgemeinen benötigt man drei Regeln, um Listen zu verarbeiten:

- Regel für die leere Liste,
- Regel für ein oder mehrere führende Elemente,
- rekursive Regel für die Restliste.

Listen sind eine vielfältig einsetzbare Datenstruktur. In Kapitel 3 werden Listen für verschiedene Probleme verwendet, beispielsweise zur Darstellung von Zuständen und zur Verwaltung möglicher Suchpfade.

4.3.3 Arithmetik

Auch in PROLOG sind arithmetische Operationen möglich. Im Abschnitt 4.2.2 über die Unifikation wurde bereits das Prädikat `is/2` eingeführt. Es wertet die rechte Seite aus und unifiziert das Resultat mit der linken Seite:

```
?- X is 4+1.
X=5
```

In PROLOG gibt es eine Reihe von vordefinierten Operatoren für gängige Operationen, wie für die vier Grundrechenarten +, -, *, / und für die Vergleichsoperatoren <, >, >=, =<, =:=, =\=.

```
?- X is 5 - 2 - 1.
X=2
?- 60 > 50.
yes
```

Die Vergleichsoperatoren werten im Allgemeinen ihre arithmetischen Argumente vor dem Vergleich aus. Das Zeichen \ wird in PROLOG häufig für die Negation von Prädikaten benutzt:

- `\==` … nicht identisch
- `\=` … nicht unifizierbar

Betrachten wir einige Prädikate, in denen Arithmetik verwendet wird.

Die Länge einer Liste wird bestimmt durch:

```
listenlaenge([ ], 0).
listenlaenge([ _ |T], N) :-
   listenlaenge(T, N1) ,
   N is N1 + 1.
```

Die leere Liste hat die Länge 0. Eine nichtleere Liste – nur diese passt auf das Muster `[ _ |T]` – enthält N1+1 Elemente, wenn N1 die Länge der Liste `T` ist. Die anonyme Variable _ wird eingesetzt, da es unwesentlich ist, welches Element das führende ist.

Das Maximum einer nur aus Zahlen bestehenden Liste kann durch die Klauseln

```
max([X], X).
max([First | Rest], Max) :-
   max(Rest, Max1) ,
   (First > Max1, Max=First
   ;
   First =< Max1, Max=Max1).
```

definiert werden. Hier wird das logische Oder (Semikolon) verwendet. Das Semikolon kann man durch die Angabe von mehreren Regeln umgehen.

Die Summe aller Elemente einer Liste – die Liste bestehe wiederum nur aus Zahlen – wird durch diese Regeln definiert:

```
sumlist([ ],0).
sumlist([First|Rest], Summe) :-
   sumlist(Rest, Sum1),
   Summe is Sum1 + First.
```

Übung 4.11 Listen

Programmieren Sie in PROLOG ein Prädikat, welches eine Liste von Zahlen als Eingabeparameter bekommt und daraus die Liste der Quadrate berechnet.

Übung 4.12 Listen

Programmieren Sie ein Prädikat, welches aus einer Liste alle doppelten Elemente entfernt.

Übung 4.13 Geometrische Strukturen

Sei `viereck(P1,P2,P3,P4)` die Darstellung eines Vierecks in der Ebene. Die `Pi` seien Punkte. Definieren Sie, wann ein Viereck ein Parallelogramm, ein Rechteck oder ein Quadrat ist.

Übung 4.14 Listen

Was antwortet PROLOG auf diese Fragen?

```
?- append(X, Y, [1,2,3,4]).
?- append(_, [Vorg,7,Nachf | _], [1,2,3,4,5,6,7,8,9]).
```

Übung 4.15 Listen-Prädikate

Definieren Sie das Umdrehen einer Liste `reverse/2`, das Kreuzprodukt zweier Listen `kreuz/3` sowie den Test, ob eine Liste eine gerade oder ungerade Anzahl von Elementen enthält (`evenlength/1`, `oddlength/1`).

Übung 4.16 Unifikation

Was antwortet PROLOG auf folgende Fragen? Begründen Sie Ihre Aussage.

```
?- X==Y, X=Y.
?- X=Y, X==Y.
```

4.4 Steuerung der Abarbeitung

Bei der Programmierung in PROLOG steht grundsätzlich die Darstellung logischer Zusammenhänge im Vordergrund. Die Konzentration bei der Entwicklung eines PROLOG-Programms liegt folglich auf der Aufstellung der über das Problem bekannten Fakten und Regeln.

Mitunter ist es nicht vermeidbar, die Abarbeitung in PROLOG zu kennen und gegebenenfalls auch auszunutzen. So ist es beispielsweise erforderlich zu wissen, dass beim Anwenden der Regel

```
sumlist([First | Rest], Summe) :-
   sumlist(Rest, Sum1),
   Summe is Sum1 + First.
```

zunächst der rekursive Aufruf mit der Restliste `Rest` erfolgt, bevor

```
Summe is Sum1 + First
```

aktiviert wird.

Aus logischer Sicht ist die Reihenfolge unwesentlich, da beide Bedingungen unabhängig von einer Reihenfolge gelten müssen. Betrachtet man die Regel mit vertauschten Bedingungsliteralen:

```
sumlist([First | Rest], Summe) :-
   Summe is Sum1 + First,
   sumlist(Rest, Sum1).
```

und startet die Anfrage:

```
?- sumlist([1,2,3], M).
```

so wird als erstes die erste Bedingung geprüft:

```
Summe is Sum1 + 1
```

Zuerst wird nun die rechte Seite als arithmetischer Ausdruck ausgewertet. Da `Sum1` zu diesem Zeitpunkt eine freie Variable ist, kann dies nicht funktionieren, und es entsteht ein Fehler.

Um nicht in solche Fallen zu laufen, wird auf einige Aspekte der Abarbeitung und möglicher Steuerungen näher eingegangen.

4.4.1 Reihenfolge der Klauseln

Beispiel 4.1 Fakultätsfunktion

Es ist die Fakultät von n zu berechnen. Dazu wird die mathematische Definition nach PROLOG übertragen:

$n! = n * (n-1)!$

```
fak(N, Fak) :- N1 is N-1,
   fak(N1, Fak1),
   Fak is Fak1 * N.
```

$0! = 1$

```
fak(0, 1).
```

Zunächst sei auf Spezifika von PROLOG hingewiesen:

1. Im rekursiven Aufruf $(n-1)!$ kann nicht `fak(N-1, Fak1)` formuliert werden, da die Unifikation `N-1` nur als Struktur betrachtet, nicht aber als arithmetischen Ausdruck berechnet.
2. Auch das Resultat $n * (n-1)!$ muss erst berechnet werden, bevor es zurückgegeben werden kann. Der Regelkopf darf nicht `fak(N, Fak1 * N)` sein, da auch hier die Unifikation die Multiplikation nicht ausführt.

Doch nun zur eigentlichen Frage. Was passiert, wenn die Anfrage gestellt wird:

```
?- fak(4, N).
```

Es wird eine Fehlermeldung wegen Speicherplatzmangel ausgegeben.

Warum erhält man kein Resultat? PROLOG läuft in einen unendlichen Rekursionszyklus, da die erste Regel immer wieder anwendbar ist. Vertauscht man beide Regeln, so erhält man das korrekte Resultat.

Sucht PROLOG nach einer passenden Regel, so versucht PROLOG die Regeln in der vorgegebenen Reihenfolge.

Schaut man kritisch auf obiges Beispiel, so stellt man fest, dass die rekursive Regel die Fakultätsfunktion nicht korrekt beschreibt. Diese Regel gilt nur für $N > 0$, darüber hinaus auch nur für natürliche Zahlen. Die korrekten Regeln lauten:

```
fak(0, 1).
fak(N, Fak) :-
   integer(N), N>0,
   N1 is N-1,
   fak(N1, Fak1),
   Fak is Fak1 * N.
```

Aus Sicht des korrekten Verhaltens spielt die Reihenfolge der Regeln nun keine Rolle mehr.

Reihenfolge-Probleme können ihre Ursache in unvollständigen Spezifikationen, in unvollständig beschriebenen Sachverhalten haben. Dies ist in Beispiel 4.1 der Fall.

4.4.2 Reihenfolge der Literale im Körper einer Regel

Beispiel 4.2 `vorfahre_von/2`

Das Prädikat `vorfahre_von/2` haben wir bereits auf Seite 154 definiert. Zum Vergleich wird hier eine zweite Variante angegeben:

Variante 1:

```
vorfahre_von(X, Y) :- eltern_von(X, Y).
vorfahre_von(X, Y) :-
   eltern_von(X, Z),
   vorfahre_von(Z, Y).
```

Variante 2:

```
vorfahre_von(X, Y) :- eltern_von(X, Y).
vorfahre_von(X, Y) :-
   vorfahre_von(Z, Y),
   eltern_von(X, Z).
```

Es wird nun die Anfrage gestellt: `?- vorfahre_von(gerda, gerda).`

Mit der ersten Variante bekommt man die korrekte Antwort `no`, bei der zweiten Variante allerdings tritt eine Fehlermeldung auf, da die Reihenfolge der Bedingungsliterale ungünstig gewählt ist. PROLOG ruft in der zweiten Regel wieder rekursiv `vorfahre_von/2` auf, hier `vorfahre_von(Z, gerda)`. Dies wiederholt sich, bis das Programm entweder durch den Nutzer oder mit einer Fehlermeldung aufgrund unzureichenden Speicherplatzes abgebrochen wird.

Auch hier gilt wieder, dass aus logischer Sicht die Reihenfolge der Bedingungsliterale keine Rolle spielt. Prozedural ist aber sehr wohl ein Unterschied festzustellen.

Bei der Verwendung der Rekursion gibt es zwei Probleme:

1. Im `vorfahre_von/2`-Beispiel tritt das Problem der eventuellen Nicht-Termination auf. Durch eine ungünstige Reihenfolge im Programm entsteht bei der Abarbeitung ein unendlicher Zyklus.
2. Bei Rekursion können Speicherprobleme auftreten. Da dies nicht nur für PROLOG typisch ist, sondern generell für rekursive Programmierung gilt, betrachten wir ein rekursives Programm der folgenden Struktur:

   ```
   PROCEDURE BEISPIEL(....)
      ...................   /* Programmteil 1 */
      BEISPIEL(....);       /* rekursiver Aufruf */
      ...................   /* Programmteil 2 */
   END.
   ```

   Bei jedem rekursiven Aufruf wird Speicherplatz reserviert, um die Information über den noch abzuarbeitenden Programmteil 2 zu speichern. Dies kann zu einem Abbruch des Programms wegen unzureichendem Speicherplatz führen. Ist dagegen der rekursive Aufruf der letzte der Prozedur oder Regel – man spricht dann von Endrekursion (Tail recursion) – so tritt dieses Problem nicht auf.

Ein Grundprinzip ist demnach: *Einfache Dinge stets zuerst versuchen!* Dies betrifft sowohl die Reihenfolge der Regeln als auch die Reihenfolge der Literale in einer Regel. Dieses Prinzip gilt speziell für rekursive Programme.

Bezüglich des obigen Beispiels sei nochmals festgehalten, dass aus dem Blickwinkel der Logik beide Varianten identisch sind, aber eben nicht aus der Sicht der Abarbeitung.

Es gibt somit leider Programme, die *deklarativ korrekt*, aber *prozedural inkorrekt* sind.

Die meisten Programmiersprachen haben keine deklarative Interpretation. Deklaratives Programmieren verbessert die Formulierbarkeit und die Lesbarkeit. Allerdings zeigen die Beispiele, dass wir prozedurale Aspekte berücksichtigen müssen.

4.4.3 Kontrolle des Backtracking

In den vorherigen Abschnitten wurde erläutert, dass PROLOG bei der Abarbeitung von Anfragen auch Alternativen sucht und findet. Das Zurückgehen und Suchen nach Alternativen wird als **Backtracking** bezeichnet.

Zur Illustration des Backtrackings wollen wir ein PROLOG-Programm entwickeln, welches einen Kunden – beispielsweise im Rahmen der Prüfung auf Kreditwürdigkeit – bezüglich seines Einkommens einschätzt. Ein monatliches Einkommen von weniger als 1000 – es bleibt dem Leser überlassen, eine Währung auszuwählen – wird als gering eingestuft. Liegt das Einkommen über 2000, wird es als hoch eingestuft. Zwischen 1000 und 2000 wird es als mittleres Einkommen angesehen.

In PROLOG sehen die entsprechenden Regeln so aus:

```
einkommen(X, gering) :- X < 1000.
einkommen(X, mittel) :- X >= 1000, X =< 2000.
einkommen(X, hoch) :- X > 2000.
```

Was passiert bei der Anfrage: `?- einkommen(950, B), B=hoch.`

Zunächst wird die erste Regel versucht. Das Bedingungsliteral `X < 1000` ist erfüllt. Die Variable `B` bekommt den Wert `gering`, folglich scheitert die zweite Teilanfrage `B=hoch`. Das Backtracking setzt ein, die zweite Regel wird versucht. Sie scheitert, da die Bedingungen nicht erfüllt sind. Anschließend wird auch die dritte Regel versucht, auch ohne Erfolg. Es wird die Antwort `no` gegeben.

Dies ist korrekt, aber aufgrund des Einkommens von 950 ist der Versuch, die Anfrage mit den Regeln 2 oder 3 zu beweisen, von vornherein zum Scheitern verurteilt.

Der Versuch der Anwendung der zweiten oder dritten Regel kann mit dem so genannten **Cut** – geschrieben als Ausrufezeichen `!` – verhindert werden.

Wenn `X < 1000` gilt, so kommt nur die erste Regel in Frage, also schneidet man die zweite und dritte Regel ab:

```
einkommen(X, gering) :- X < 1000, !.
```

Kommt die zweite Regel zur Anwendung, so ist klar, dass `X >= 1000` gilt, also kann die entsprechende Bedingung weggelassen werden:

```
einkommen(X, mittel) :- X =< 2000, !.
```

Kommt die dritte Regel zur Anwendung, so muss `X > 2000` bereits gelten:

```
einkommen(X, hoch) .
```

Der Cut wird in diesem Programm als Hilfsmittel zur Wissensrepräsentation eingesetzt. Man kann mit dem Cut ausdrücken: „Diese Regel ist genau die richtige, es kommt keine andere in Frage“. Für die erste Regel bedeutet dies: „Wenn das Einkommen unter 1000 liegt, ist diese Regel die einzig zutreffende.“

Zur Illustration sei ein zweites Beispiel [Bra01] angegeben.

Beispiel 4.3 Tennisspieler

Es werden Tennisspieler danach klassifiziert, ob sie Gewinner, Kämpfer oder – wir sind höflich – einfach Sportler sind. Dazu setzen wir Informationen über Spielresultate in der Form `gewinnt(federer, nadal)` voraus.

Jemand ist ein Kämpfer, wenn er/sie Spiele sowohl gewinnt als auch verliert:

```
typ(X, kaempfer) :-
   gewinnt( X, _ ),
   gewinnt( _ , X ),
   !.
```

Er/Sie ist ein Gewinnertyp, wenn nur gewonnen wird. Hier muss nur noch überprüft werden, ob ein Spiel gewonnen wurde. Ist dies der Fall, muss nicht mehr überprüft werden, ob kein Spiel verloren wurde, denn dies ist ohnehin klar.

Gäbe es ein verlorenes Spiel, so wäre die erste Regel erfolgreich. Die zweite Regel könnte dann aufgrund des Cut nicht benutzt werden.

```
typ(X, gewinner) :-
   gewinnt( X, _ ),
   !.
```

Analog ist beim Typ Sportler nur noch zu überprüfen, ob zumindest einmal ein Spiel verloren wurde:

```
typ(X, sportler) :-
   gewinnt( _ , X ).
```

Die Wirkung des **Cut** setzt erst beim **Backtracking** ein. Nur dann soll PROLOG keine weiteren, eventuell vorhandenen Regeln finden. Der Cut bewirkt aber kein physisches Löschen der Regeln.

Sei eine Klausel dieser Struktur gegeben:

```
H :- B1, ... , Bn , ! , A1, ... , Am.
```

Sind `B1, . . . , Bn` erfüllt, so werden alle Alternativen, alle eventuell noch anwendbaren Regeln zum Beweis für `B1, . . . ,Bn` und `H` abgeschnitten. Mit einigen Beispiele möchten wir dies illustrieren.

Will man `element/2` nur zum reinen Testen einsetzen, kann der Cut verwendet werden:

```
element(X, [X | _ ]) :- !.
element(X, [ _ | Y]) :- element(X, Y).
```

Die Berechnung des Maximums einer Liste wird ebenfalls vereinfacht:

```
max([X], X) :- !.
max([F|Rest], M1) :-
   max(Rest, M1),
   F < M1,
   !.
max([F|Rest], F).
```

Der Cut kann die Bedeutung eines Programms verändern. Wir betrachten folgende PROLOG-Regeln und ihr jeweiliges aussagenlogisches Äquivalent:

```
p :- a , b.
p :- c.
```

Wann ist `p` erfüllt? `p` ist gemäß der ersten Regel wahr, wenn `a` und `b` erfüllt sind. `p` ist aber auch wahr, wenn `c` wahr ist. `p` ist also wahr, wenn `a` und `b` oder `c` wahr ist. Dies entspricht der aussagenlogischen Implikation: $(a \wedge b) \vee c \rightarrow p$ Fügt man in der ersten Regel einen Cut ein,

```
p :- a , ! , b.
p :- c.
```

so ist die zweite Regel nur dann erreichbar, wenn `a` nicht gilt.

Diese Regeln entsprechen der Implikation: $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c) \rightarrow p$

Häufig verwendet man den Cut, um eine Effizienzsteigerung zu erreichen. In diesen Fällen verändert der Cut die Bedeutung eines Programms nicht unbedingt. Wir betrachten die Definition der Vereinigung zweier Listen im Sinne der Mengenvereinigung:

```
union([ ], Menge, Menge).
union([Element|Rest], Menge, Vereinigung) :-
   member(Element, Menge), !,
   union(Rest, Menge, Vereinigung).
```

```
union([Element|Rest1], Menge, [Element|Rest2]) :-
   not(member(Element, Menge)),
   union(Rest1, Menge, Rest2).
```

Der Cut in der zweiten Regel verändert die Bedeutung von `union/3` nicht, er bewirkt allein eine effizientere Abarbeitung. Bei einem Backtracking wird ohne den Cut die dritte Regel unnötigerweise auch noch versucht, obwohl `member(Element, Menge)` in der zweiten Regel erfüllt ist.

Man spricht in diesem Fall von einem **grünen** Cut. Verändert der Cut die Bedeutung eines Programms, so spricht man von einem **roten** Cut:

```
union([ ], Menge, Menge).
union([Element|Rest], Menge, Vereinigung) :-
   member(Element, Menge), !,
   union(Rest, Menge, Vereinigung).
union([Element|Rest1], Menge, [Element|Rest2]) :-
   union(Rest1, Menge, Rest2).
```

Der Cut in der zweiten Regel ist ein roter Cut, da die Anfrage

```
?- union([1], [1, 2], X).
```

`X=[1,2]` liefert, wenn in der zweiten Regel der Cut steht. Löscht man den Cut, so bekommt man nicht nur die korrekte Antwort `X=[1,2]`, sondern auch eine zweite Antwort `X=[1,1,2]`.

Diese ist – wenn man die Listen als Mengen betrachtet – nicht korrekt. Der Cut verändert in diesem Fall die Bedeutung des Programms und ist demzufolge ein roter Cut.

4.4.4 Die Negation

Angenommen, wir benötigen ein Prädikat `ohnekinder/1`, welches erfüllt ist, falls eine Person keine Kinder hat. Die einzige Information, die gemäß dem einführenden Beispiel der Familien-Wissensbasis vorliegt, ist die Information über die Eltern: `eltern_von/2` (`vater_von/2` oder `mutter_von/2`). Es liegt also nur die positive Information, dass jemand Kinder hat, vor. Wie realisiert man nun obiges Prädikat? Es wird geprüft, ob jemand Kinder hat. Falls dies der Fall ist, erzwingt man, dass das Prädikat **falsch** liefert. Ansonsten endet das Prädikat erfolgreich.

```
ohnekinder(P) :-
   eltern_von( _ , P ), !, fail.
ohnekinder(P).
```

Ist die Anfrage `eltern_von(_, P)` erfüllt, so bewirkt der Cut das Abschneiden der alternativen zweiten Regel. `fail/0` ist ein in PROLOG vordefiniertes Prädikat, welches nie erfolgreich ist und folglich Backtracking erzwingt. Durch den Cut wird die zweite Regel aber nicht mehr gefunden.

Ist `eltern_von(_,P)` nicht erfolgreich, `P` hat also keine Kinder, so wird zur zweiten Regel gegangen, die ohne Bedingungen erfolgreich ist.

Dieses Prinzip wird in PROLOG benutzt, um das `not/2` zu definieren:

Eine **negierte Anfrage** ist wahr, wenn die Anfrage nicht erfolgreich ist.

Die entsprechende Definition in PROLOG sieht wie folgt aus:

```
not(Ziel) :- Ziel, !, fail.
not(_).
```

Diese Implementation des `not/1` wird *Negation as failure* genannt. Das `not` liefert nie eine Variablenbelegung und entspricht damit nicht der logischen Negation. Aus diesem Grund sollte das `not` nur dann verwendet werden, wenn in der Anfrage keine freien Variablen mehr enthalten sind.

Der Cut wird bei der Definition der Negation benutzt, um ein negatives Ergebnis zu erzwingen.

Mit der Kombination `!, fail` kann man – im Kontext der Wissensrepräsentation – darstellen, dass etwas zwingend falsch ist:

```
kredit_wuerdig(X) :-
   hat_einkommen(X, Y),
   einkommen(Y, gering),
   !, fail.
```

Hat jemand ein Einkommen, welches gering ist, ist er nicht kreditwürdig.

Übung 4.17 Cut

Was unterscheidet das Prädikat `element/2` mit Cut von `element/2` ohne Cut?

Übung 4.18 Listen

Programmieren Sie das Prädikat `nicht_element/2`.

4.5 Vordefinierte Prädikate

Natürlich muss man in PROLOG nicht alles neu erfinden. Es gibt eine Vielzahl vordefinierter Prädikate.

Ein- und Ausgabe

Standardprädikate wie `write/1`, `read/1` oder `nl/0` sind in allen PROLOG-Systemen vordefiniert. Prädikate zur Dateiarbeit (Streams) zählen ebenso dazu. Die meisten Systeme enthalten auch Fenster- und Menü-Techniken oder bieten Schnittstellen zu Standard-Oberflächen.

Zugriff auf Fakten und Regeln

Man kann zur Laufzeit, also während der Abarbeitung, Regeln laden, löschen oder modifizieren. Dazu gibt es eine Reihe von Prädikaten. In Tabelle 4.2 sind die wesentlichen genannt.

Tabelle 4.2 Prädikate für den Zugriff auf Klauseln

Prädikat	Bedeutung	Beispiel
`consult/1`	Laden von Fakten und Regeln aus Dateien	`consult('test.pl')`
`retract/1`	Löschen von Fakten oder Regeln	`retract(vater_von(juergen,wolfgang))`
`assert/1`	Hinzufügen von Fakten oder Regeln	`assert(vater_von(marianne,juergen))`

Mittels `assert/1` und `retract/1` können Klauseln zur Laufzeit des Programms hinzugefügt beziehungsweise gelöscht werden. Dies erlaubt einem Programm, sich selbst zur Laufzeit zu modifizieren. Am folgenden Beispiel wird illustriert, wie man dies für die Umsetzung einer einfachen Lernfähigkeit nutzen kann. Dabei wird das spezielle Prädikat `asserta/1`, welches die Klausel an erster Position, also vor allen anderen Klauseln einfügt, verwendet.

Wir wollen prüfen, ob zwei Personen Zwillinge sind. Dazu müssen sie den gleichen Vater haben und am gleichen Tag geboren sein. Die Information über den Geburtstag wird über das Prädikat `gebtag/2` als gegeben vorausgesetzt.

```
zwilling(X, Y) :-
   vater_von(X, V), vater_von(Y, V), X\=Y,
   gebtag(X, Datum), gebtag(Y, Datum),
   asserta(zwilling(X, Y)).
```

Am Schluss der Regel wird die gerade bewiesene Aussage als Fakt gespeichert, um zu verhindern, dass bei einem erneuten Aufruf für das gleiche Personenpaar der Beweis wiederum geführt wird. Dies erfordert allerdings ein Speichern des Faktes vor der Regel.

Ablaufsteuerung

Mit Hilfe der bereits diskutierten Prädikate Cut sowie `fail/0` kann man den Ablauf der Abarbeitung in PROLOG steuern. Die PROLOG-Systeme stellen weitere vordefinierte Prädikate zum Typtest, zur Ablaufverfolgung oder zur (De)Komposition von Termen zur Verfügung. Für eine vollständige Übersicht sei auf spezielle PROLOG-Literatur und die jeweiligen Hilfesysteme verwiesen.

Übung 4.19 Listen

Entwickeln Sie ein Prädikat, welches zählt, wie viele Zahlen, Atome, freie Variablen in einer Liste vorkommen.

4.6 Beispielprogramme

In diesem Abschnitt diskutieren wir ausgewählte Probleme und lösen diese mit typischen PROLOG-Programmen.

4.6.1 Das Einfärben einer Landkarte

Wir möchten eine Landkarte einfärben. Benachbarte Länder dürfen aber nicht die gleiche Farbe bekommen. Sei eine vereinfachte Landkarte mit sechs Ländern gegeben (Bild 4.7).

Die Anordnung der Länder kann in PROLOG beschrieben werden:

```
karte(A,B,C,D,E,F) :-
   nachbar(A,B),
   nachbar(A,E),
```

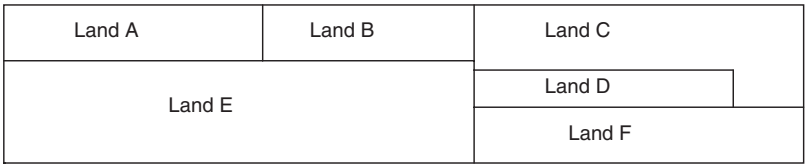


Bild 4.7 Landkartenfärbe-Problem

```
    nachbar(B,C),
    nachbar(B,E),
    nachbar(C,D),
    nachbar(C,E),
    nachbar(C,F),
    nachbar(D,E),
    nachbar(D,F),
    nachbar(E,F).
```

Danach ist nur noch zu spezifizieren, welche Farbnachbarschaften erlaubt sind:

```
nachbar(rot,blau).     nachbar(rot,gelb).     nachbar(rot,gruen).
nachbar(blau,rot).     nachbar(blau,gelb).    nachbar(blau,gruen).
nachbar(gruen,rot).    nachbar(gruen,gelb).   nachbar(gruen,blau).
nachbar(gelb,rot).     nachbar(gelb,blau).    nachbar(gelb,gruen).
```

Nun kann nach einer Lösung gefragt werden:

```
?- karte(A,B,C,D,E,F).
```

Man erhält als erste Lösung:

```
A = C = rot, B = D = blau, E = gelb, F = gruen
```

Die Lösung wird allein aufgrund der Problembeschreibung gefunden. Es ist nicht nötig, den Algorithmus zu beschreiben, wie eine Lösung gesucht wird. In diesem Beispiel kommt es allein auf die korrekte Problembeschreibung an. Sie reicht aus, um PROLOG zu befähigen, eine Lösung zu finden. Dies veranschaulicht die Verwendung von PROLOG als Sprache zur **Wissensrepräsentation**. Das Wissen über das Problem wird in Form von PROLOG-Klauseln dargestellt.

Übung 4.20 Färbeproblem

Finden Sie eine geschicktere Darstellung für die erlaubten Farbpartnerschaften in `nachbar/2`.

4.6.2 Die Türme von Hanoi

Es gibt eine Sage, die berichtet, dass ein Bauer zu einem Mönch kommt und ihn befragt, wie lange die Welt existieren wird. Dieser antwortet ihm mit dem Gleichnis: „ … so lange, wie es dauert, die Türme von Hanoi umzusetzen … “.

Diese Türme von Hanoi befinden sich in einem buddhistischen Tempel bei Hanoi. Es gibt drei Türme, die aus insgesamt zehn Etagen bestehen. Zu Beginn liegen alle Etagen auf dem ersten

Platz, sie sollen auf den dritten Platz umgelegt werden. Der zweite Platz kann dabei als Zwischenablage genutzt werden. Es darf aber immer nur eine kleinere auf einer größeren Etage abgelegt werden. Es darf auch jeweils nur eine Etage bewegt werden. Für das Umsetzen einer Etage benötigt man ein Jahr. Wie kann den Mönchen geholfen werden, dieses Problem zu lösen?

Die Anfangssituation ist in Bild 4.8 für den Fall von nur acht Etagen dargestellt.

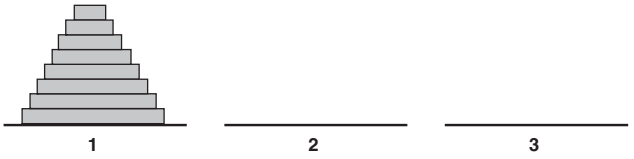


Bild 4.8 Türme von Hanoi

Die Etagen müssen von Platz 1 zum Platz 3 transportiert werden. Da das gleichzeitige Bewegen von mehreren Etagen nicht erlaubt ist, ist die Lösung dieses Problems nicht offensichtlich. Wenn man aber wüsste, wie man die oberen sieben Etagen auf Platz 2 bekommt, dann könnte man die verbliebene Etage von Platz 1 nach Platz 3 transportieren. Nun müsste man noch die sieben Etagen von Platz 2 nach Platz 3 transportieren.

Dies kann in PROLOG bereits formuliert werden:

```
transportiere(EtagenZahl, Von, Nach, Hilfsplatz) :-
   ObereEtagen is EtagenZahl - 1,
   transportiere(ObereEtagen, Von, Hilfsplatz, Nach),
   transportiere(1, Von, Nach, Hilfsplatz),
   transportiere(ObereEtagen, Hilfsplatz, Nach, Von).
```

Wenn man eine bestimmte Anzahl von Etagen (`EtagenZahl`) vom Platz `Von` zum Platz `Nach` transportieren möchte, so müssen zunächst die oberen Etagen (`EtagenZahl-1`) vom Platz `Von` zum dafür zur Verfügung stehenden Platz `Hilfsplatz` transportiert werden. Anschließend wird die verbliebene Etage an ihren korrekten Platz gebracht. Dann werden die auf den Hilfsplatz verschobenen Etagen auf den Zielplatz gebracht.

Diese Regel ist nicht nur für den Fall von acht Etagen anwendbar, sondern für eine beliebige Anzahl von Etagen. Für den Fall, dass genau eine Etage zu verschieben ist, kann die auszuführende Aktion direkt angegeben werden:

```
transportiere(1, Von, Nach, _ ) :-
   write('Transportiere oberste Etage von'-Von-'nach'-Nach), nl.
```

Die erste Regel ist nur sinnvoll, wenn mindestens zwei Etagen zu transportieren sind. Sie muss folglich um die Bedingung

```
   EtagenZahl > 1
```

erweitert werden.

Der Aufruf erfolgt mittels

```
?- transportiere(8,1,3,2).
```

Man bekommt die korrekte Handlungsvorgabe:

```
Transportiere oberste Etage von - 1 - nach - 3
Transportiere oberste Etage von - 1 - nach - 2
```

```
Transportiere oberste Etage von - 3 - nach - 2
Transportiere oberste Etage von - 1 - nach - 3
Transportiere oberste Etage von - 2 - nach - 1
Transportiere oberste Etage von - 2 - nach - 3
Transportiere oberste Etage von - 1 - nach - 3
Transportiere oberste Etage von - 1 - nach - 2
Transportiere oberste Etage von - 3 - nach - 2
Transportiere oberste Etage von - 3 - nach - 1
Transportiere oberste Etage von - 2 - nach - 1
...
```

Das Problem der Türme von Hanoi ist ein anschauliches Beispiel, wie Rekursion bei der Problembeschreibung und -lösung sehr hilfreich sein kann. Allein durch die rekursive Beschreibung des Vorgehens bekommt man hier eine Lösung.

4.6.3 Das Acht-Damen-Problem

Auf einem Schachbrett sind acht Damen so zu positionieren, dass keine Dame eine andere Dame schlagen kann. Eine mögliche Lösung ist in Bild 4.9 dargestellt. Zum Vergleich sei auf Abschnitt 8.2 verwiesen. Dort wird ein Ansatz zur Lösung des Problems mit neuronalen Netzen vorgestellt.

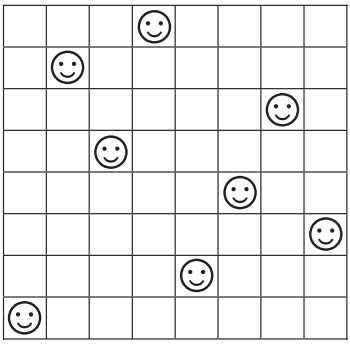


Bild 4.9 Mögliche Lösung des Acht-Damen-Problems

Gemäß den Schachregeln muss eine Lösung für das Problem diese Restriktionen erfüllen:

1. In jeder Zeile steht exakt eine Dame.
2. In jeder Spalte steht exakt eine Dame.
3. Pro Diagonale darf höchstens eine Dame positioniert werden.

Es bietet sich folgendes Vorgehen an:

Es wird eine Liste $[[x_1, y_1], \ldots, [x_8, y_8]]$ generiert, wobei $[x_i, y_i]$ bedeutet, dass in Zeile x_i die Dame in Spalte y_i steht.

Dabei wird diese Liste, beginnend mit der leeren Liste, immer um eine weitere Dame erweitert, bis alle Zeilen besetzt sind. In jedem Schritt wird überprüft, ob sich die neue Dame mit

den bisherigen Damen „verträgt“. Wir beginnen dabei in Zeile 1 und positionieren zeilenweise, bis Zeile 8 erreicht ist. Im folgenden Programm wird die Liste in umgekehrter Reihenfolge generiert. Die in Zeile 1 positionierte Dame steht in der Liste hinten, die zuletzt generierte Dameposition ganz vorn.

Es wird ein Prädikat `dame/4` definiert:

```
dame(Aktuelle_Zeilennummer,
   Noch_freie_Spalten,
   Bereits_positionierte_Damen,
   Loesung)
```

Die Liste der noch freien Spalten wird zu Beginn mit `[1,2,3,4,5,6,7,8]` belegt und sukzessive verkürzt.

Um zu überprüfen, ob man alle Damen positioniert hat, gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste Variante testet, ob man alle acht Zeilen belegt hat. Die zweite Möglichkeit besteht darin zu überprüfen, ob alle Spalten belegt sind. Dann muss die Liste der noch freien Spalten leer sein. In diesem Fall ist die Lösung durch die bereits positionierten Damen (`BpD`) gegeben:

```
dame(_, [ ], BpD, BpD).
```

Sind noch nicht alle Damen positioniert, muss in der aktuellen Zeile (`Zeile`) eine Dame positioniert werden. Dazu wird aus der Liste der noch freien Spalten eine Spalte (`Spalte`) gelöscht. Nun überprüfen wir, ob die beiden Diagonalen, die durch `(Zeile, Spalte)` gehen, schon durch eine andere Dame belegt sind.

Wie überprüft man, ob eine Diagonale schon belegt ist? Wodurch sind alle Positionen einer Diagonalen ausgezeichnet? Zwei Damen sind in einer Diagonalen, wenn die Summe oder die Differenz aus Zeile und Spalte gleich sind.

```
dame(Zeile, Frei, BpD, Loesung) :-
   delete(Spalte, Frei, RestFrei),
   Index1 is Zeile + Spalte,
   Index2 is Zeile - Spalte,
   not(belegt(Index1, Index2, BpD)),
   NeueZeile is Zeile + 1,
   dame(NeueZeile, RestFrei, [[ Zeile, Spalte ] | BpD ], Loesung).
```

`belegt/3` ist erfolgreich, wenn einer der beiden Indizes (Summe oder Differenz aus Zeile und Spalte) bereits belegt ist.

```
belegt( X, _, [[ Zeile, Spalte] | _ ]) :- X is Zeile + Spalte.
belegt( _, X, [[ Zeile, Spalte] | _ ]) :- X is Zeile - Spalte.
belegt( X1, X2, [ _ | Tail ]) :- belegt( X1, X2, Tail).
```

Das Programm ist dadurch gekennzeichnet, dass eine Positionierung aller acht Damen gleichzeitig eine Lösung darstellt. Im Gegensatz zu Generate-and-test-Verfahren, die eine beliebige Positionierung aller acht Damen generieren und erst dann die Zulässigkeit überprüfen, wird hier bei jeder positionierten Dame sofort die Verträglichkeit mit den bisher positionierten Damen geprüft. Man kann dieses Vorgehen verfeinern, indem man geeignete Heuristiken hinzunimmt und beispielsweise nicht zeilenweise positioniert, sondern sich auch an den Diagonalen orientiert.

4.6.4 Das Problem der stabilen Paare

Aus dem Operations Research (vgl. [Sch86]) stammt dieses Zuordnungsproblem: Fünf Männer und fünf Frauen müssen sich zu fünf Projektteams zusammenfinden. Jedes Projektteam besteht aus einer Frau und einem Mann. Die Loyalität gegenüber dem Arbeitgeber sorgt dafür, dass im Prinzip jeder bereit ist, mit einem beliebigen Partner zusammenzuarbeiten. Allerdings haben sich natürlich zwischen den Personen mehr oder weniger starke Sympathien herausgebildet. Jeder hat folglich eine Prioritätenliste, mit wem er/sie gern zusammenarbeiten würde. Seien die Wunschlisten wie folgt gegeben:

```
wunsch(adam, [anna, berta, clara, doris, elvira]).
wunsch(boris, [berta, clara, anna, doris, elvira]).
wunsch(claus, [elvira, berta, clara, doris, anna]).
wunsch(daniel, [anna, doris, berta, clara, elvira]).
wunsch(emil, [clara, anna, berta, doris, elvira]).
wunsch(anna, [adam, boris, claus, daniel, emil]).
wunsch(berta,[boris, claus, adam, daniel, emil]).
wunsch(clara, [daniel, adam, boris, claus, emil]).
wunsch(doris, [boris, claus, daniel, emil, adam]).
wunsch(elvira, [emil, adam, boris, claus, daniel]).
frauen([anna, berta, clara, doris, elvira]).
maenner([adam, boris, claus, daniel, emil]).
```

Der Chef möchte natürlich Teams bilden, die stabil sind. Jede Person bekommt einen Partner. Die Zuordnung soll aber so erfolgen, dass Ärger vermieden wird. Eine nicht stabile Zuordnung ist beispielsweise gegeben durch:

```
Claus - Clara, Daniel - Elvira, Emil - Doris, ....
```

Claus würde lieber mit Elvira als mit Clara arbeiten, und auch Elvira zieht Claus ihrem zugewiesenen Partner Daniel vor. Dies wird dem Arbeitsklima und der Arbeitsmoral auf Dauer nicht förderlich sein.

Welche Eigenschaft muss eine Zuordnung `[[adam, F1], [boris, F2], [claus, F3], [daniel, F4], [emil, F5]]` erfüllen?

1. Die Zuordnung zwischen den Frauen und Männern muss eindeutig sein.
2. Es darf in dieser Liste keinen Konflikt im Sinne einer Instabilität geben.

```
paare(Liste) :-
   generiere_zuordnung(Liste), not(konflikt(Liste)).
```

Die erste Forderung sichert man in `generiere_zuordnung(Liste)` ab, indem sukzessive Elemente aus der Liste aller Frauen gelöscht und den Männern zugeordnet werden.

```
generiere_zuordnung(Liste) :-
   frauen(Frauen),
   remove(F1, Frauen, Frauen1),
   remove(F2, Frauen1, Frauen2),
   remove(F3, Frauen2, Frauen3),
   remove(F4, Frauen3, Frauen4),
   remove(F5, Frauen4, _ ),
   Liste=[[adam, F1], [boris, F2], [claus, F3], [daniel, F4], [emil, F5]].
```

Wann kommt es in der Liste zu einem Konflikt? Dies ist dann der Fall, wenn es einen `Mann` und eine `Frau` gibt, die sich gegenseitig im Vergleich mit ihren jeweils zugewiesenen Partnern (`Partner1`, `Partner2`) bevorzugt hätten.

```
konflikt(Liste) :-
   frauen(Frauen),
   maenner(Maenner),
   member(Frau, Frauen),
   member([Partner1, Frau], Liste),
   member(Mann, Maenner),
   member([Mann, Partner2], Liste),
   bevorzugt(Frau, Partner1, Mann),
   bevorzugt(Mann, Partner2, Frau).
```

Eine Person bevorzugt einen anderen Kandidaten gegenüber dem Partner, wenn der Kandidat in der Wunschliste weiter vorn steht. Dazu muss sich die Wunschliste mittels `append/3` so in zwei Listen teilen lassen, dass der Partner die erste Person der zweiten Teilliste ist und der gesuchte Kandidat in der ersten Teilliste enthalten ist:

```
bevorzugt(Person, Partner, Kandidat) :-
   wunsch(Person, Vorzugsliste),
   append(L1, [Partner|_], Vorzugsliste),
   member(Kandidat, L1),!.
```

Vergleicht man die Lösung für das Problem der stabilen Paare mit der Lösung für das Acht-Damen-Problem, so erkennt man zwei unterschiedliche Vorgehensweisen.

Zur Lösung des Damen-Problems wurde prozedural vorgegangen. Die Damen wurden sukzessive positioniert, wobei nur solche Positionierungen akzeptiert werden, die sich mit den bereits auf dem Schachbrett befindlichen Damen vertragen. Wieso haben wir dazu PROLOG verwendet, und nicht eine andere Sprache? PROLOG übernimmt für uns die Suche, sprich das Ausprobieren von bestimmten Positionen und das alternative Positionieren der Damen. Das entscheidende Prädikat ist `remove/3`, welches Backtracking ermöglicht.

Das Finden eines stabilen Paares dagegen beruhte allein auf der logischen Beschreibung einer Konfliktsituation (`konflikt/1`). Hier können prozedurale Aspekte völlig außer Acht gelassen werden, allein die Beschreibung des „Was ist zu lösen?“ ist ausreichend.

4.6.5 Das Einstein-Problem

Das folgende Problem wird Albert Einstein zugeschrieben. Man findet es auch unter dem Namen *Zebrarätsel*. Einstein soll gesagt habe, dass es nur 2% der Weltbevölkerung lösen können. Es kursieren unterschiedliche Varianten im Web.

Beispiel 4.4 Einstein-Rätsel

Fünf Männer wohnen in 5 nebeneinander liegenden Häusern unterschiedlicher Farbe. Sie haben unterschiedlichen Geschmack bei Speisen und Getränken und haben unterschiedliche Haustiere. Folgendes ist bekannt:

- Der Norweger wohnt im ersten Haus.
- Der Engländer wohnt im roten Haus.
- Der Däne trinkt gern Tee.
- Das grüne Haus liegt links vom weißen.
- Derjenige, der gern Pizza isst, wohnt neben demjenigen, der eine Katze hält.
- Derjenige, der im gelben Haus wohnt, liebt Schokolade.
- Der Deutsche isst gern Fisch.
- Derjenige, der das Haus in der Mitte bewohnt, trinkt gern Milch.
- Der Pizza-Esser hat einen Nachbarn, der am liebsten Wasser trinkt.
- Derjenige, der am liebsten Bockwurst isst, hält sich Vögel.
- Der Schwede hält sich Hunde.
- Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
- Der Liebhaber von Pommes Frites trinkt gern Bier.
- Der Pferdeliebhaber wohnt neben dem gelben Haus.
- Im grünen Haus trinkt man am liebsten Kaffee.

Man kann dieses Rätsel sehr schön mittels PROLOG lösen. Wir generieren zunächst sukzessive einfach alle möglichen Zuordnungen von Nationen, Farben, Getränken, Essen und Haustieren zu den Häusern 1-5. Dies tun wir einfach derart, dass den Variablen (beispielsweise Rot) eine entsprechende Hausnummer (1-5) zugeordnet wird.

Listing 4.3 PROLOG-Programm für das Einstein-Problem, Teil 1

```
loesung([Nation,Farbe,Getraenk,Essen,Haustier]) :-
   Nation   = [Norweger,Englaender,Daene,Deutscher,Schwede],
   Farbe    = [Rot,Gruen,Weiss,Gelb,Blau],
   Getraenk = [Tee,Milch,Wasser,Bier,Kaffee],
   Essen    = [Pizza,Schokolade,Fisch,Bockwurst,Pommes],
   Haustier = [Katze,Voegel,Hunde,Pferde,Goldfisch],
   % beliebige Zuordnung der Komponenten zu den Häusern 1, 2, 3, 4, 5
   permutation([1,2,3,4,5],Nation),
   permutation([1,2,3,4,5],Farbe),
   permutation([1,2,3,4,5],Getraenk),
   permutation([1,2,3,4,5],Essen),
   permutation([1,2,3,4,5],Haustier),
   ...
```

Nun müssen wir überprüfen, ob die geforderten Bedinungen aus Beispiel 4.4 erfüllt sind.

Listing 4.4 PROLOG-Programm für das Einstein-Problem, Teil 2

```
   ...
   Norweger = 1,
   Englaender = Rot,
   Daene = Tee,
```

```
    Gruen+1 =:= Weiss,
    abs(Pizza-Katze) =:= 1,
    Gelb = Schokolade,
    Deutscher = Fisch,
    Milch = 3,
    abs(Pizza-Wasser) =:= 1,
    Bockwurst = Voegel,
    Schwede = Hunde,
    abs(Norweger-Blau) =:= 1,
    Pommes = Bier,
    abs(Pferde-Gelb) =:= 1,
    Gruen = Kaffee.
```

Beispielsweise prüfen wir durch `Norweger = 1`, ob der Norweger im Haus 1 wohnt.

Dass derjenige, der gern Pizza isst, einen Nachbarn hat, der am liebsten Wasser trinkt, wird duch `abs(Pizza-Wasser) =:= 1` geprüft.

Wir setzen hier voraus, dass wir in PROLOG bereits Permutationen spezifiziert haben

```
permutation([], []) :- !.
permutation(Liste, [X|PermListe]) :-
   delete(X,Liste,Restliste), permutation(Restliste, PermListe).
```

und dass `delete/3` (vgl. Seite 167) verfügbar ist.

Starten wir nun die Suche nach einer Lösung mittels des Aufrufs `loesung(L)`, so erleben wir eine unangenehme Überraschung, denn das Programm benötigt sehr, sehr lange. Die Laufzeit werden wir hier in Stunden oder wohl eher in Tagen messen. Das ist natürlich sehr unbefriedigend, denn das Problem sieht ja nun nicht wirklich extrem kompliziert aus.

Rechnen wir aber aus, wieviele Kombinationen es gibt (Teil 1 des Programms), so sehen wir sehr schnell, dass die Permutation von 5 Elementen 5!, also 120 ergibt. Und das fünfmal. Es ergibt sich also 120^5. Und nun erkennen wir, dass die Komplexität einfach zu groß ist.

Was tun? Nun, es ist offensichtlich, dass wir die Bedingung, dass der Norweger in Haus 1 wohnt, gleich nach der Zuordnung der Nationen zu den Häusern testen sollten. Wir sortieren also unser Programm um und prüfen die Bedingungen so früh, wie es nur geht.

Listing 4.5 PROLOG-Programm für das Einstein-Problem, effiziente Variante

```
loesung2([Nation,Farbe,Getraenk,Essen,Haustier]) :-
   Nation   = [Norweger,Englaender,Daene,Deutscher,Schwede],
   Farbe    = [Rot,Gruen,Weiss,Gelb,Blau],
   Getraenk = [Tee,Milch,Wasser,Bier,Kaffee],
   Essen    = [Pizza,Schokolade,Fisch,Bockwurst,Pommes],
   Haustier = [Katze,Voegel,Hunde,Pferde,Goldfisch],
   permutation([1,2,3,4,5],Nation), Norweger=1,
   permutation([1,2,3,4,5],Farbe),
      Englaender=Rot, Gruen+1=:=Weiss, abs(Norweger-Blau)=:=1,
   permutation([1,2,3,4,5],Getraenk),
      Daene=Tee, Milch=3, Gruen=Kaffee,
   permutation([1,2,3,4,5],Essen),
      Gelb=Schokolade, abs(Pizza-Wasser)=:=1,
      Bockwurst=Voegel, Pommes=Bier,
   permutation([1,2,3,4,5],Haustier),
      abs(Pizza-Katze)=:=1, Deutscher=Fisch,
      Schwede=Hunde, abs(Pferde-Gelb)=:=1.
```

Nun findet PROLOG die Lösung sehr schnell.

Das Beispiel zeigt uns erneut, wie leicht man in PROLOG Lösungen finden kann, dass ein naives Entwickeln in PROLOG jedoch häufig zu Effizienzproblemen führt, die man aber meistens beseitigen kann.

Im Rahmen dieses Kapitels konnte nur eine Auswahl von PROLOG-Beispielen vorgestellt und diskutiert werden. Die obigen Beispielprogramme und eine Reihe weiterer Beispielen und Aufgaben sind unter der WWW-Seite *www.wi.hs-wismar.de/ki-buch* zu finden. Dort findet man auch eine Ausgabeprozedur für das Einsteinbeispiel.

Es gibt eine Reihe von Erweiterungen der PROLOG-Philosophie, beispielsweise das Konzept des *Answer Set Programming*, vgl. [Lif19], und das schon ältere, so genannte *Constraint Logic Programming*, welches in SWI-Prolog integriert ist.

Übung 4.21 Damen-Problem

Modifizieren Sie das 8-Damen-Programm, so dass das Damen-Problem auch für andere Dimensionen gelöst werden kann.

Übung 4.22 Türme von Hanoi

Erweitern Sie das Programm für die Türme von Hanoi, so dass nicht nur die Handlungsfolge ausgegeben wird. Vielmehr soll PROLOG die drei Plätze mit den darauf befindlichen Etagen verwalten, um den aktuellen Zustand zu jeder Zeit ausgeben zu können. Wählen Sie als Datenstruktur die Liste.

Übung 4.23 Symbolisches Differenzieren

Entwickeln Sie in PROLOG ein Programm zum symbolischen Differenzieren. Beispielsweise möchten wir bei dieser Anfrage

```
?- symb_diff(x * (y + 2), x, D).
```

die Antwort `D = y + 2`.

Übung 4.24 Symbolisches Differenzieren

Erweitern Sie das Programm zum symbolischen Differenzieren um eine Komponente, die arithmetische Ausdrücke vereinfacht, beispielsweise `x + x = 2x`.

5 Künstliche neuronale Netze

Viele Tätigkeiten im täglichen Leben können Menschen sehr schnell und erfolgreich ohne langes Nachdenken erledigen. Wir halten unser Gleichgewicht beim Gehen oder Fahrradfahren, wir erkennen Gesichter und können diese einordnen, wir reden, hören und verstehen,wir schreiben und lesen. Manche dieser Tätigkeiten führen wir sogar gleichzeitig aus, manchmal erlaubt, manchmal verboten, wie Telefonieren am Steuer.

Es gibt viele Fertigkeiten, die ein Mensch ausführt, ohne explizit über die dabei ablaufenden Teilschritte nachzudenken. Unter dem Begriff „Nachdenken“ sei verstanden, dass Aussagen unter Nutzung von Schlussfolgerungen zu neuen Gedanken, neuen Aussagen verknüpft werden. Wir denken nach, wenn zum Beispiel eine mathematische Aufgabe gelöst, ein Algorithmus in eine Programmiersprache umgesetzt oder eine Urlaubsreise geplant wird.

Reden und Schreiben dagegen sind Fertigkeiten, die ohne Nachdenken ausgeführt werden. Selbstverständlich sollte man darüber nachdenken, was man sagen oder schreiben will. Sind die Gedanken jedoch einmal gefasst, so erfolgt das Artikulieren der Wörter ohne nachzudenken. Gleiches gilt für das Schreiben im Sinne des Aneinanderreihens von Buchstaben. Die Techniken des Redens und Schreibens laufen im Unterbewusstsein ab.

Hierbei kann auch keine Verarbeitung von Regeln stattfinden, da eine Regelverkettung zu viel Zeit beansprucht. Es sind derart kurze Reaktionszeiten erforderlich, dass eine Abarbeitung von WENN-DANN-Regeln nicht erfolgreich sein kann: Man versuche einmal, Regeln für das Halten der Balance beim Fahrradfahren aufzustellen. Die Lösung:

- *WENN Gefahr_Fall_nach_links DANN Gewichtsverlagerung_rechts*
- *WENN Gefahr_Fall_nach_rechts DANN Gewichtsverlagerung_links*

scheint auf der Hand zu liegen, ist aber leider unbrauchbar. Denkt man erst darüber nach, ob die erste oder zweite Regel zutrifft, liegt man schon auf der Nase. Außerdem würden diese einfachen Regeln zu einem sich selbst verstärkenden Hin- und Herschwanken mit analog negativem Ausgang führen.

Die genannten Fähigkeiten des Menschen sind antrainierte Verhaltensweisen, die ohne Nachdenken angewendet werden können. Es wird keiner bei Gefahr, das Gleichgewicht zu verlieren, nachdenken und mittels obiger Regeln reagieren. Die antrainierten Fähigkeiten können zudem relativ problemlos auf neue, noch nie vorher in genau dieser Weise aufgetretene Situationen angewendet werden: Die Fähigkeit, Fahrrad fahren zu können, beschränkt sich nicht nur auf ein Rad und auf die bereits bekannten Wegstrecken. Auch „kleine Störungen“ werden kompensiert: Radfahren mit Last, Gehen mit Gepäck oder Gehen mit einem Verband.

Die Fähigkeit, Umgebungen, Personen oder auch Stimmen und Geräusche wieder zu erkennen, lässt sich nicht mittels logischer Schlussregeln erklären. Wir sehen die Bilder, wir hören die Geräusche und können (fast) sofort eine Zuordnung treffen. Man sagt, dass der Mensch dafür ungefähr 0,1 Sekunden benötigt. Die Schaltzeit eines natürlichen Neurons wurde mit etwa einer Millisekunde bestimmt. Daraus lässt sich ableiten, dass ein Erkennungsprozess in etwa

100 Schritten abläuft. Wie viel lässt sich mit einer sequentiellen Folge von 100 Maschinenbefehlen ausrichten? Unser neuronales Netz arbeitet offensichtlich hochgradig parallel, um diese Leistungen zu erzielen.

Die genannten Fertigkeiten werden nicht durch Nachdenken erworben, wie aber dann? Die Aneignung erfolgt durch Nachahmen: Wir lernen aus Beispielen. Das Nachahmen ist häufig durch Versuch und Irrtum geprägt, offensichtliche Fehler, die selbst erkannt werden oder Hinweise eines Lehrmeisters bestärken die Ausprägung der richtigen Handlungsabläufe. Ist die Fähigkeit einmal erworben, so wird bei der Anwendung einer solchen Fähigkeit weder ein Algorithmus noch eine Folge von Regeln abgearbeitet. Wir reden, gehen, schwimmen, fahren Rad oder Auto, technisch gesehen, meist im Unterbewusstsein. Diese für den Menschen so einfach ablaufenden Prozesse konnten lange Zeit nur sehr schwer oder gar nicht durch einen Computer ausgeführt werden.

Künstliche neuronale Netze versuchen die Arbeitsweise des menschlichen Gehirns nachzubilden. Wie unsere Millionen von zusammengeschalteten Nervenzellen trainierbar sind und dann Steuerungsaufgaben übernehmen können, so möchte man Computerprogramme ähnlich befähigen, in analoger Weise aus Beispielen Gelerntes auf neue Situationen anzuwenden. Man hofft, auf diese Weise einige Probleme lösen zu können, die sich bisher einer Lösung mittels Computer entzogen haben.

Die Geschichte künstlicher neuronaler Netze reicht bis in die Mitte des vorigen Jahrhunderts zurück:

- In den 1950er Jahren werden erste Ideen eines künstlichen neuronalen Netzes entwickelt: das Perzeptron, vgl. Abschnitt 6.1.
- In den 1960er bis in die 1980er Jahre hinein verlagerte sich der Schwerpunkt in Richtung der symbolverarbeitenden künstlichen Intelligenz.
- In den 1990er Jahren erlebten die künstlichen neuronalen Netzen einen großen Aufschwung. Insbesondere vorwärtsgerichtete neuronale Netze und werden seitdem für die Zeichenerkennung, Steuerung oder die Datenanalyse eingesetzt, vgl. Abschnitt 6.2.
- In der ersten Dekade des 21sten Jahrhunderts finden künstliche neuronale Netze als eine „normale“ Technik Anwendung in den Systemen im Bereich der Datenanalyse, sei es Data Mining, Business Intelligence, Predictive Analytics, Big Data oder ganz allgemein Data Science.
- In der zweiten Dekade beginnt dann der Erfolg der Convolutional Neural Networks (CNN). Diese, mit Deep Learning trainierten, Netze erreichen eine neue Qualität, insbesondere in der Erkennung von Objekten in Bildern und der Verarbeitung natürlicher Sprache.

Nach einer Einführung in die Grundlagen neuronaler Netze in diesem Kapitel werden verschiedene Architekturen neuronaler Netze, zugehörige Lernverfahren und typische Einsatzfälle vorgestellt. Die Abschnitte des Kapitels 6 über **vorwärts gerichtete neuronale Netze**, die überwacht mit einem Fehlerrückmelde-Algorithmus (Backpropagation-Algorithmus) trainiert werden, bauen unmittelbar aufeinander auf. Das Paradigma des **Wettbewerbslernens** kommt in mehreren unterschiedlichen Formen neuronaler Netze zum Einsatz; es wird im Kapitel 7 behandelt. Der Leser kann sich mit den Varianten neuronaler Netze der Kapitel 7 und 8, Wettbewerbslernen sowie **autoassoziative Netze**, weitgehend unabhängig voneinander befassen.

Kleinere Beispiele können mittels Tabellenkalkulation nachgebildet werden. Kenntnisse einer Tabellenkalkulation sind für das Verständnis neuronaler Netze nicht zwingend erforderlich, sie erleichtern jedoch das Nachvollziehen der Beispiele. Für viele einführende Beispiele setzen wir den JavaNNS ein. Dieser wird zwar nicht mehr weiterentwickelt, bietet aber nach wie vor sehr gute Möglichkeiten, sich mit dem Verhalten von neuronalen Netzen und der Wirkungsweise verschiedener Lernverfahren vertraut zu machen. Werkzeuge und Vorgehensweisen für die **Entwicklung neuronaler Netze** diskutieren wir im Kapitel 9.

Bei aller Euphorie für diese konnektionistischen Ansätze, die durch viele spektakuläre Erfolge der letzten Jahre befeuert wird, ist ein Einsatz künstlicher neuronaler Netze rational zu entscheiden:

- Falls eine effektive algorithmische Lösung existiert, die zudem ausreichend effizient ist, dann ist eine derartige Lösung vorzuziehen.
- Ist Erfahrung vorhanden, die sich in Regeln ausdrücken lässt, dann ist eine regelbasierte Lösung anzustreben.
- Sind die vorher genannten Ansätze nicht möglich oder gescheitert, dann können künstliche neuronale Netze erfolgreich sein, falls genügend Daten vorhanden sind, aus denen gelernt werden kann.

5.1 Das künstliche Neuron

Künstliche neuronale Netze werden wie im vorherigen Abschnitt kurz ausgeführt eingesetzt: Das Netz wird auf ein spezielles Verhalten trainiert und ist anschließend in der Lage, sowohl auf die Trainingssituationen als auch darüber hinaus auf neue Situationen angemessen zu reagieren. Diese Fähigkeit wird durch das Zusammenschalten vieler (einige hundert bis einige tausend) Neuronen erreicht.

Das biologische Vorbild der künstlichen neuronalen Netze wird an dieser Stelle nur kurz erwähnt, da es zum Verständnis der Arbeitsweise künstlicher Neuronen nicht unbedingt erforderlich ist. Der biologische Hintergrund wird zum Beispiel in dem Grundlagenwerk von Zell [Zel97] erläutert.

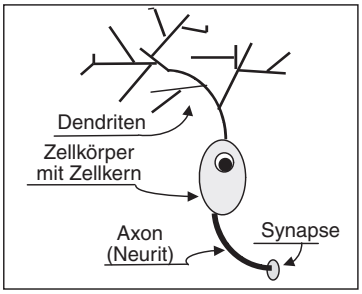


Bild 5.1 Biologisches Neuron

Für das Verständnis künstlicher neuronaler Netze reicht eine einfache Vorstellung über ein **biologisches Neuron** aus (Bild 5.1). **Dendriten** nehmen die Erregungen, die von anderen Neu-

ronen ausgehen, auf und leiten sie an den **Zellkern** weiter. Die Erregung der Zelle wird dann über das **Axon** an die **Synapsen** transportiert, die den Übergang zu den Dendriten weiterer Zellen herstellen. Ein biologisches Neuron hat mehrere tausend bis zehntausend Verbindungen zu weiteren Neuronen.

Dieser Grundaufbau wird nun in Form von Softwarebausteinen nachgebildet.

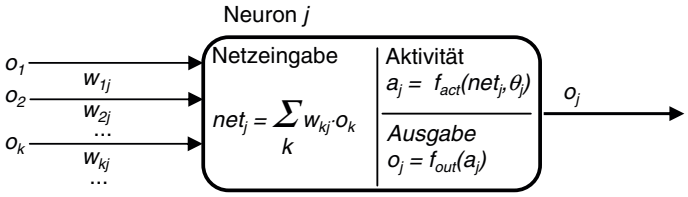


Bild 5.2 Künstliches Neuron

Zu einem Neuron gehören die folgenden Werte und Funktionen:

- Die **Eingabeinformationen** o_k aus den gewichteten Verbindungen w_{kj}, die andere Neuronen mit dem Neuron j besitzen, oder die direkt aus der Umgebung des Netzes als Eingabewerte aus der Umgebung einfließen.
- Eine **Propagierungsfunktion** net_j, die die Eingabeinformation mit den Gewichten der Verbindungen zu einer Netzeingabe verknüpft. Eine Netzeingabe fasst die Informationen zusammen, die aus dem Netz in das Neuron eingehen.
- Die **Aktivierungsfunktion** f_{act} bestimmt aus der Netzeingabe unter Berücksichtigung eines Schwellwertes θ_j die neue Aktivität a_j , den neuen Zustand des Neurons: $a_j = f_{act}(net_j, \theta_j)$
- Eine **Ausgabefunktion** f_{out} ermittelt aus der Aktivität a_j des Neurons den Ausgabewert o_j, der an die nachfolgenden Neuronen weitergeleitet wird und dort als Bestandteil der Netzeingabe auftritt: $o_j = f_{out}(a_j)$
- Ein lokaler Speicher enthält die **Aktivierung** a_j und den Schwellwert θ_j des Neurons.

Funktionen können im Allgemeinen beliebig komplex sein, so dass sich hinter jeder Funktion ein beliebig komplexer Algorithmus verstecken könnte. Das jedoch ist ausdrücklich nicht gewollt. Die Funktionen in einem Neuron sind bewusst sehr einfach. Die Leistungsfähigkeit wird nicht durch komplexe Algorithmen, sondern durch das Zusammenschalten vieler einfacher Elemente mit einfachen Verarbeitungsschritten erzielt.

Definition 5.1 Neuron

Ein Neuron ist eine Verarbeitungseinheit, die die über die gewichteten Verbindungen eingehenden Werte geeignet zusammenfasst (Propagierungsfunktion) und daraus mittels einer Aktivierungsfunktion unter Beachtung eines Schwellwertes einen Aktivierungszustand ermittelt. Aus dieser Aktivierung bestimmt eine Ausgabefunktion die Ausgabe des Neurons.

Wie die Definition 5.1 aussagt, wird das Verhalten eines Neurons durch drei Funktionen bestimmt. Im Folgenden werden diese Funktionen vorgestellt. Die Aufstellung wird ergänzt durch einige Bemerkungen zur Aktivierung und zum Schwellwert.

Propagierungsfunktion

Als **Propagierungsfunktion** f_{prop}, meist als Netzeingabe net_j bezeichnet, wird fast ausschließlich die Summe über alle eingehenden gewichteten Netzverbindungen eingesetzt:

$$f_{prop_j} = net_j = \sum_k w_{kj} \cdot o_k \tag{5.1}$$

Mitunter findet man den Hinweis, dass statt der Summation auch die Multiplikation eingesetzt werden kann. Eine praktische Anwendung ist jedoch nicht bekannt.

Aktivierungsfunktionen

Eine **Aktivierungsfunktion** unterstützt die Schaltfunktion eines Neurons und hat deshalb ein mehr oder weniger **sigmoiden** Charakter. Eine Funktion wird sigmoid genannt, wenn die Funktionskurve S-förmig verläuft. Als Aktivierungsfunktion werden vorrangig eingesetzt:

- lineare Funktionen,
- Gleichrichter-Funktion,
- logistische Funktion,
- Tangens Hyperbolicus,
- Schwellwertfunktion.

Die lineare Funktion, meist die **Identität**, reicht die Netzeingabe direkt weiter und ist wenig sigmoid. Die Gleichrichter-Funktion unterscheidet zwischen negativen und nichtnegativen Werten: für negative Werte liefert sie 0 und für nichtnegative Werte entspricht sie der Identität: $f(x) = max(0, x)$. Diese **ReLU-Funktion** (Rectified Linear Unit) wird insbesondere in den Convolutional Neural Networks erfolgreich eingesetzt.

Die **Schwellwertfunktion** ist die schärfste sigmoide Funktion: Nur falls die Netzeingabe den Schwellwert θ des Neurons übersteigt, wird das Neuron aktiviert, die Aktivierung zum Beispiel auf 1.0 gesetzt. Die Schwellwertfunktion wird in einfachen Netzen verwendet. Die Schwellwert-Funktion kann für alle Wertebereiche von Aktivierungen eingesetzt werden.

$$f_{Schwellwert}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta \\ 0, & sonst \end{cases} \tag{5.2}$$

Einige Lernverfahren erfordern eine differenzierbare Aktivierungsfunktion. Hier kommen die logistische Funktion oder die tanh-Funktion zum Einsatz. Die logistische Funktion wird in kleineren, vorwärts gerichteten neuronalen Netzen am häufigsten verwendet (Bild 5.4):

$$f_{logistic}(x) = \frac{1}{1 + e^{-c \cdot x}} \tag{5.3}$$

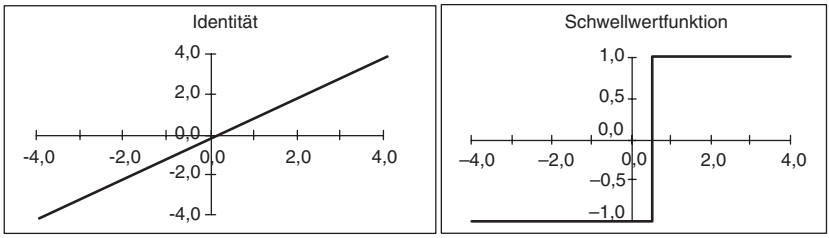


Bild 5.3 Lineare Funktion und Schwellwert-Funktion

Mit dem Parameter c kann die Steilheit der Kurve beim Übergang von 0 auf 1 gesteuert werden. Die tanh-Funktion wird verwendet, falls eine Aktivierung des Neurons aus dem Bereich (-1,+1) gewünscht wird.

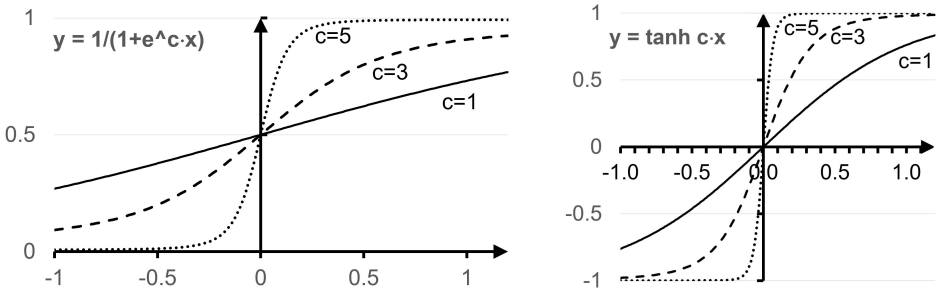


Bild 5.4 Logistische Funktion und Tangens Hyperbolicus

Ausgabefunktion

Als **Ausgabefunktion** kommt sehr häufig die Identität $f(x) = x$ zum Einsatz, obwohl andere Funktionen nicht ausgeschlossen werden.

$$f_{Ausgabe} = Id \tag{5.4}$$

Beim Einsatz der Identität als Ausgabefunktion ist somit die Aktivierung eines Neurons gleichzeitig seine Ausgabe. Falls nicht anders vermerkt, wird in den folgenden Kapiteln stets von der Identität als Ausgabefunktion ausgegangen.

Schwellwert

Ein **Schwellwert** (bias, threshold) bestimmt als ein Parameter die resultierende Aktivierung des Neurons mit. Es ist üblich, den Schwellwert in die Formel der Netzeingabe mit aufzunehmen.

$$net_j = \sum_i w_{ij} \cdot o_i - \theta_j \tag{5.5}$$

Damit erzielt man eine einfachere Anwendung der Aktivierungsfunktionen, die dann stets ihr sigmoides Verhalten um den Wert 0.0 erreichen. Die Schwellwertfunktion nimmt dann die Form an:

$$f_{Schwellwert}(net_j) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta \\ 0, & sonst \end{cases} \tag{5.6}$$

Aktivierung

Die Aktivierung eines Neurons kann unterschiedlich realisiert werden. Häufig werden binäre Aktivierungen eingesetzt: 0 – inaktiv, 1 – aktiv.

Statt (0,1) verwendet man auch (-1,+1). Die Bewertung des inaktiven Zustands mit -1 hat den Vorteil, dass die weitergehenden Verbindungen Werte ungleich 0 liefern und damit mitunter das gewünschte Verhalten des Netzes besser antrainiert werden kann. Bei Verwendung der logistischen Funktion oder der tanh-Funktion entstehen reellwertige Aktivierungen aus den Bereichen [0,+1] bzw. [-1,+1].

Weitere ganzzahlige oder reellwertige Bereiche für die Aktivierung eines Neurons sind denkbar.

Nachdem alle Komponenten, die das Verhalten eines Neurons beeinflussen, vorgestellt wurden, können wir mit einem ersten Beispiel ein konkretes Verhalten untersuchen.

Beispiel 5.1 Ein Schalter

Das einfachste künstliche neuronale Netz besteht nur aus einem Neuron. Eine derartig simple Einheit wird auch als **LTU – Linear Treshold Unit** [Nil98] oder **Adaline (Adaptive linear element)** bezeichnet:

Das Neuron wird die logische UND-Funktion nachbilden. Um diese Funktion zu realisieren, müssen geeignete Werte für die Gewichte und den Schwellwert des Neurons gefunden werden. Üblicherweise geschieht das während eines Trainingsprozesses. An dieser Stelle trainieren wir noch nicht, sondern legen die Werte geeignet fest, so dass das Neuron im Bild 5.5 als UND-Schalter fungiert. Es wird die eingeführte Propagierungsfunktion benutzt, als Aktivierungsfunktion nehmen wir eine Schwellwertfunktion, als Ausgabefunktion, wie allgemein üblich, die Identität.

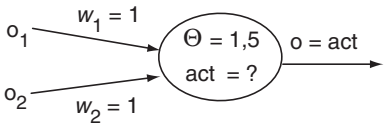


Bild 5.5 Ein UND-Schalter

Mit den angegebenen Gewichten $w_1 = 1, w_2 = 1$ und dem Schwellwert $\theta = 1,5$ ergibt sich das gewünschte Verhalten des Netzes, welches sich in Tabelle 5.1 (Seite 196) aus der Spalte $o = act$ ablesen lässt.

Tabelle 5.1 Ein- und Ausgabemuster des UND-Schalters

o_1	o_2	net	$o = act$	net'	$o' = act'$
0	0	0	0	0.0	0.1
0	1	1	0	2.6	0.2
1	0	1	0	2.6	0.2
1	1	2	1	5.2	0.8

Die Gewichte und der Schwellwert können auch durch Anlegen der Beispielmuster für eine UND-Funktion trainiert werden. Statt einer Schwellwertfunktion wird hierbei die logistische Funktion zur Ermittlung der Aktivierung benutzt. Die mittels des JavaNNS antrainierten Werte sind $w_1 = w_2 = 2.6$ sowie $\theta = 4.0$. Die Ergebnisse sind dem rechten Teil der Tabelle (net' sowie o') zu entnehmen. Auf das Trainieren eines Netzes wird später ausführlich eingegangen.

5.2 Architekturen

Werden nun mehrere Neuronen der vorher beschriebenen Bauart miteinander verknüpft, entsteht ein Netz von Neuronen. Eine Verknüpfung zwischen zwei Neuronen i und j ist durch ein Verbindungsgewicht $w_{ij} \neq 0$ charakterisiert. Die Definition eines Netzes erfolgt somit über die Festlegung der Verbindungen und der Verbindungsgewichte.

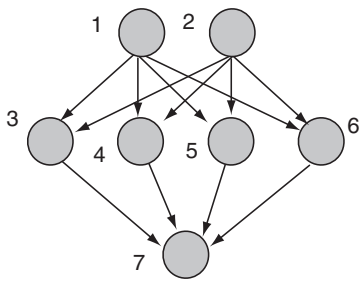
Definition 5.2 Neuronales Netz

Ein neuronales Netz besteht aus einer Menge von Neuronen, die durch gerichtete und gewichtete Verbindungen miteinander verknüpft sind. Durch die Menge der Verbindungen werden unterschiedliche Architekturen definiert.

Die **Verbindungsgewichte** lassen sich in einer Matrix darstellen. Anhand unterschiedlicher Verknüpfung von sieben Neuronen werden unterschiedliche Netztypen vorgestellt. Zum Vergleich wird neben dem Matrix-Muster der Verbindungen die Darstellung des Netzes als gerichteter Graph angegeben, vgl. [Zel97].

Vorwärts gerichtetes Netz, auch mehrstufiges Perzeptron genannt:

	1	2	3	4	5	6	7
1			■	■	■	■	
2			■	■	■	■	
3							■
4							■
5							■
6							■
7							

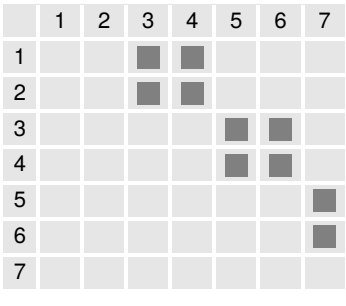


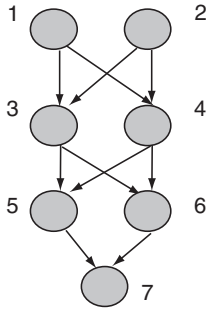
An diesem Beispiel lassen sich die Elemente erläutern:

- Als **Eingabe-Neuron** (input neuron) wird ein Neuron j bezeichnet, falls es keine gerichtete Verbindung zu diesem Neuron w_{ij} gibt. Die **Eingabeschicht** (input layer) ist die Menge aller Eingabe-Neuronen eines Netzes.
- Die **Ausgabe-Neuronen** (output neuron) stellen mit ihren Ausgabewerten das Ergebnis der Verarbeitung dar. In vorwärts gerichteten Netzen sind Ausgabe-Neuronen daran erkennbar, dass sie keine weiterführenden Verbindungen besitzen. Die Ausgabe-Neuronen sind in der **Ausgabeschicht** (output layer) zusammengefasst.
- Neuronen, die weder zur Eingabe- noch zur Ausgabeschicht gehören, sind **verdeckte (hidden) Neuronen**, die auf mehrere **verdeckte Schichten** (hidden layer) verteilt sein können.

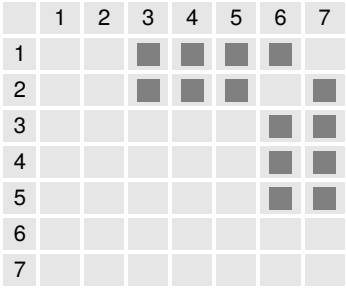
Das obige Beispiel besteht aus einer Eingabeschicht von zwei Neuronen, einer verdeckten Schicht mit vier Neuronen und einem Ausgabe-Neuron.

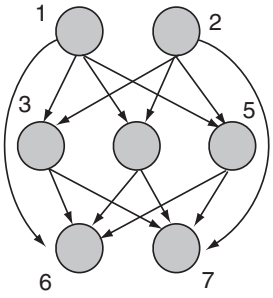
Vorwärts gerichtetes Netz mit zwei inneren Schichten:



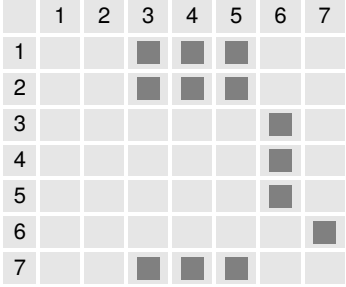


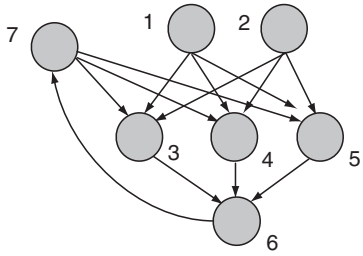
Vorwärts gerichtetes Netz mit einer inneren Schicht sowie Verbindungen, die eine Schicht überspringen (**shortcut connection**):





Netz mit Rückkopplungen von der Ausgabe- zur inneren Schicht über spezielle Neuronen:





Vollvernetzte Schicht ohne direkte Rückkopplungen, wie sie zum Beispiel in den autoassoziativen Netzen eingesetzt werden. Die Darstellung des Netzes als Graph wird dem Leser als Aufgabe überlassen.

	1	2	3	4	5	6	7
1		■	■	■	■	■	■
2	■		■	■	■	■	■
3	■	■		■	■	■	■
4	■	■	■		■	■	■
5	■	■	■	■		■	■
6	■	■	■	■	■		■
7	■	■	■	■	■	■	

Es ist leicht einsehbar, dass nur die Struktur sehr kleiner Netze auf diese Weise anschaulich gemacht werden kann. Zudem ist erkennbar, dass eine Matrix-Darstellung der Verbindungsgewichte möglich, aber für eine Implementierung in der Regel ungeeignet ist, da diese Matritzen häufig nur sehr schwach besetzt sind.

5.3 Arbeitsweise

Die Entwicklung eines künstlichen neuronalen Netzes verläuft in mehreren Zyklen. Da es derzeit (noch) keine allgemeine Erfolgsstrategie für die Entwicklung neuronaler Netze gibt, lässt sich eine Lösung nur mittels Experimenten erreichen.

Ausgehend von dem zu lösenden Problem ist zuerst eine Netzarchitektur aufzubauen. In den Abschnitten über spezielle Netzformen werden auch ihre Einsatzbereiche angesprochen, um Anhaltspunkte für die Wahl einer bestimmten Architektur zu geben. Für die erfolgreiche Entwicklung ist eine ausreichende Zahl von Trainingsdaten erforderlich. In den meisten Fällen ist ein weiterer Satz von Testdaten notwendig, mit dem die **Generalisierungsfähigkeit** eines Netzes überprüft werden kann. Hierbei wird ermittelt, wie das trainierte Netz auf bis dahin unbekannte Eingaben reagiert. Sind die Ergebnisse noch nicht zufriedenstellend, müssen weitere Versuche mit veränderten Netzparametern unternommen werden. Modifikationen können sowohl die Lernparameter als auch die Wahl des Lernalgorithmus selbst oder sogar die Netzarchitektur insgesamt betreffen.

Neuronale Netze können nach unterschiedlichen Kriterien unterteilt werden. Einige lassen sich aus der Abbildung 5.6 ableiten. Man kann trainierbare und nicht trainierbare Netze unterscheiden. Die verwendeten Lernverfahren unterteilt man in überwachtes, bestärkendes und unüberwachtes Lernen.

- **Unterteilung in trainierbare und nicht trainierbare Netze**

  Künstliche neuronale Netze im engeren Sinne sind immer trainierbar. Der Name wurde ja gerade in Anlehnung an das biologische Vorbild der lernenden, natürlichen neuronalen Netze gewählt. Typische Vertreter der trainierbaren Netze sind Perzeptron-Netze, vorwärts gerichtete Netze sowie auch einige rückgekoppelte Architekturen.

  Es gibt darüber hinaus eine Reihe von Netzen, die nicht durch Beispiele trainiert werden. Diese Netze folgen anderen Paradigmen als dem des natürlichen neuronalen Netzes. Ih-

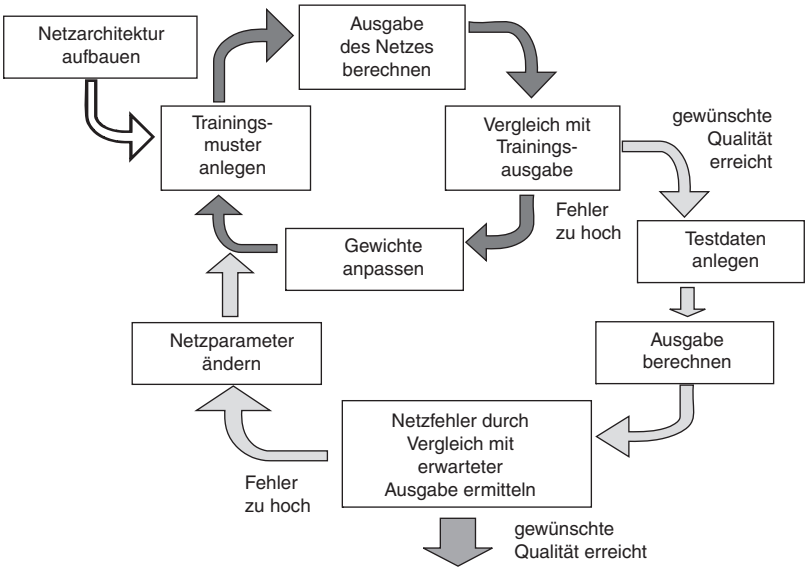


Bild 5.6 Entwicklung eines neuronalen Netzes

nen liegen physikalische Modelle zugrunde wie zum Beispiel die Teilchenbewegungen in Metallen. Verbindungsgewichte sind häufig fest und werden nicht verändert. Die Gewichte werden zur Berechnung einer Zielfunktion, eines Energieniveaus, benutzt. Eine produzierte Ausgabe wird rückgekoppelt wieder als Eingabe weiterverarbeitet. Man spricht davon, dass das Netz einschwingt. Der erreichte Endzustand ist dann in Bezug auf die Zielfunktion optimal, wenn auch meist nur lokal. Boltzmann-Maschine und Hopfield-Netze sind typische Beispiele für nicht trainierbare Netze.

- **Unterteilung in überwachtes, bestärkendes, nicht überwachtes Lernen**

  Beim überwachten Lernen (supervised learning) liegen sowohl Eingabedaten als auch die für diese Daten erwarteten Ausgabewerte vor. Mit diesen Daten wird das Netz trainiert. Die Ausgabewerte des Netzes können dann mit den erwarteten Ausgaben verglichen werden. Fehler werden zum „Lernen“, konkret zum Verändern der Verbindungsgewichte sowie der Schwellwerte in den Neuronen, benutzt.

  Überwachte Lernverfahren haben kein biologisches Vorbild, sind aber in der Anwendung sehr effizient. Die Backpropagation-Lernverfahren sind typische Vertreter. Eher biologisch motivierbar, aber weniger effizient ist das bestärkende Lernen (reinforcement learning). Mitunter kann für eine Eingabe nicht gesagt werden, wie richtig oder wie falsch diese ist. Man kann nur feststellen, ob die Ausgabe richtig oder falsch ist. Das Netz muss mit dieser groben Information (richtig/falsch) trainiert werden. Biologisch plausibel ist das nicht überwachte Lernen (unsupervised learning). Das Netz „merkt“ selbst, wie es auf die Ausgaben zu reagieren hat. Unüberwachtes Lernen wird immer dann angewendet, wenn das Ergebnis nicht bekannt ist. Anwendungen sind beispielsweise sogenannte Clusterungen, das sind Klassifizierungsversuche, wobei Art und Umfang der Klasseneinteilung vorher nicht bekannt sind.

- **Unterteilung in vorwärts gerichtete, partiell rückgekoppelte, rückgekoppelte, autoassoziative, wachsende Netzarchitekturen**

  Die Netz-Architektur bestimmt im Zusammenhang mit dem zugehörigen Lernverfahren die Leistungsfähigkeit und damit die Einsatzmöglichkeiten eines Netzes. Die Einteilung der Netze nach ihrer Architektur liegt auch diesem Buch zugrunde, wobei Architekturen, in denen das Wettbewerbslernen eingesetzt wird, zu einem Kapitel zusammengefasst werden.

Allen neuronalen Netz-Modellen ist gemeinsam, dass eine Vielzahl einfacher Einheiten, Neuronen oder Teilchen, zusammen eine Aufgabe zu lösen haben. Das Zusammenschalten dieser Einheiten kann durch gewichtete Verbindungen und/oder durch eine Verarbeitungsfunktion realisiert werden. Ziel des Zusammenwirkens ist das Lösen von Aufgaben, die nicht durch einen Algorithmus explizit beschreibbar sind, sondern deren Lösung durch Beispiele beschrieben wird.

Aus den Beispielen wird ein Netzverhalten antrainiert, das dann in der Lage ist, auch bis dato unbekannte Eingaben wie gewünscht zu verarbeiten.

Übung 5.1 Neuron, neuronales Netz

Was ist ein Neuron? Was ist ein neuronales Netz?

Übung 5.2 Ausgabe

Wie wird in einem künstlichen Neuron die Ausgabe berechnet?

Übung 5.3 Natürliche und künstliche neuronale Netze

Welche Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten lassen sich zwischen natürlichen und künstlichen neuronalen Netzen finden?

Übung 5.4 Ziel eines NN

Worin besteht das Ziel der Entwicklung eines neuronalen Netzes?

Übung 5.5 Lernstrategien

Welche verschiedenen Lernstrategien unterscheidet man bei neuronalen Netzen?

Übung 5.6 Lernstrategien des Menschen

Können Sie Beispiele finden, wo die verschiedenen Lernstrategien auch vom Menschen verwendet werden?

Übung 5.7 NN für logische Funktionen

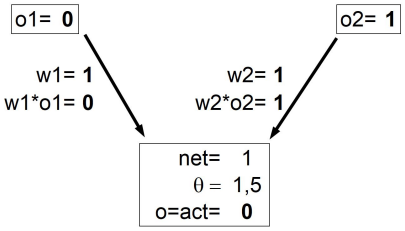
Bestimmen Sie Gewichte w_1, w_2 und den Schwellwert θ so, dass jeweils eine der folgenden logischen Funktionen realisiert wird: ODER, ENTWEDER-ODER, WENN-DANN, Äquivalenz.

Übung 5.8 NN für mehrstellige logische Funktionen

Wie sind die Gewichte und der Schwellwert bei mehr als zwei Eingaben ($n > 2$) für die UND- (ODER-) Funktion zu gestalten?

Übung 5.9 NN und Tabellenkalkulation

Implementieren Sie Netze entsprechend der vorherigen beiden Aufgaben mittels eines Tabellenkalkulationsprogramms. Als Beispiel sei das neuronale Netz für die UND-Funktion gegeben:



Übung 5.10 Vorgänge im neuronalen Netz

Geben Sie einen Überblick über die Vorgänge in einem natürlichen neuronalen Netz.

Übung 5.11 Einsatzgebiete von neuronalen Netzen

Recherchieren Sie die Einsatzgebiete für künstliche neuronale Netze und strukturieren Sie die Beispiele gemäß den gegebenen Unterteilungen des Abschnittes 5.3.

6 Vorwärtsgerichtete Netze

Vorwärtsgerichtete neuronale Netze (**vorwärts verkettete**, **feed forward**) bestehen aus mehreren Schichten von Neuronen, mindestens jedoch aus einer Eingabe- und einer Ausgabeschicht. Eine oder mehrere innere Schichten können dazwischengeschaltet sein. Entscheidend ist, dass nur Neuronen verschiedener Schichten und dann nur in Richtung Ausgabeschicht miteinander verknüpft sind. Die vorwärtsgerichteten neuronalen Netze werden überwacht mittels Fehler-Rückmeldung trainiert.

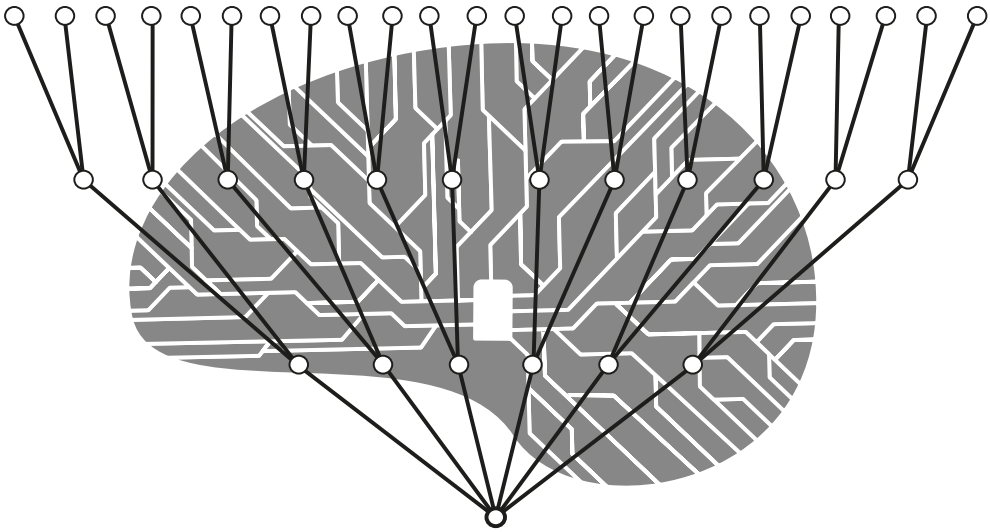


Bild 6.1 Ein mehrschichtiges vorwärtsgerichtetes Netz

6.1 Das Perzeptron

Das Perzeptron ist ein einfaches vorwärtsgerichtetes Netz ohne innere Schicht, das durch ein vereinfachtes Backpropagation-Verfahren trainiert wird. Motiviert ist diese Architektur durch die Vorstellung der Vorgänge im menschlichen Auge, der Weiterleitung der Information zum Gehirn und dem dort stattfindenden Erkennungsprozess. Das Perzeptron wurde Ende der 50er-Jahre von Rosenblatt entwickelt.

Die Information wird von der Eingabeschicht über nicht trainierbare Verbindungen mit festen Gewichten an die Darstellungsschicht übermittelt. Über die trainierbaren Verbindungen mit veränderlichen Gewichten zur Ausgabeschicht erfolgt eine Informationsverarbeitung.

Aus Sicht der Informationsverarbeitung in neuronalen Netzen kann die Eingabeschicht mit ihren festen, nicht trainierbaren Verbindungen weggelassen werden. Die Information wird direkt an die Darstellungsschicht gegeben, die somit als Eingabeschicht fungiert. Damit besitzt das Perzeptron tatsächlich nur eine trainierbare Verbindungsschicht. Es ist ein einstufiges vorwärtsgerichtetes Netz. Ende der 60er-Jahre wurde von Minsky und Papert die eingeschränkte Leistungsfähigkeit eines Perzeptrons theoretisch begründet. Die Autoren zogen daraus den Schluss, dass neuronale Netze prinzipiell wenig zur Lösung der in der künstlichen Intelligenz anstehenden Probleme beitragen können, vgl. Kurzweil.1993.

Diese Aussage hat die Forschung auf dem Gebiet der neuronalen Netze für viele Jahre gebremst. Erst Ende der 80er Jahre rückten die neuronalen Netze wieder stärker in den Mittelpunkt der Forschung. Begünstigt durch die besseren Hardwarevoraussetzungen konnten größere neuronale Netze getestet, untersucht und praktisch eingesetzt werden.

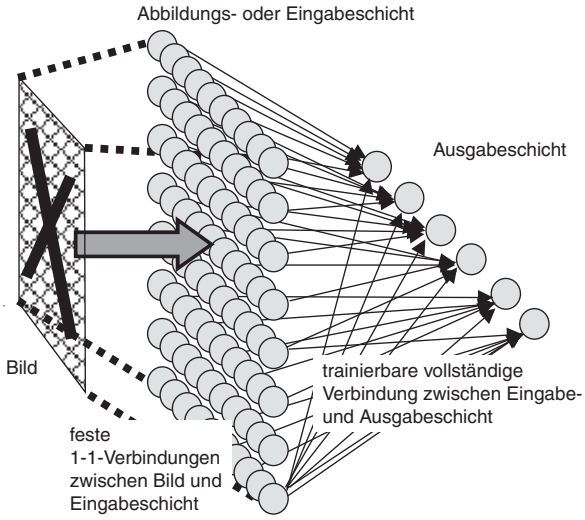


Bild 6.2 Aufbau eines Perzeptrons

Der Fehler von Minsky und Papert bestand darin, unzulässig von einem einstufigen Perzeptron mit einer trainierbaren Schicht auf die Leistung eines mehrstufigen Perzeptrons mit mehreren trainierbaren Schichten geschlossen zu haben. Mehrstufige Perzeptrons sind prinzipiell in der Lage, jede berechenbare Funktion zu realisieren. In diesem Buch werden mehrstufige Perzeptrons unter dem Begriff **Backpropagation-Netze** im Abschnitt 6.2 behandelt.

Satz 6.1 Konvergenz-Theorem

Einem einstufigen Perzeptron kann jede Funktion, die es realisieren kann, in endlicher Zeit antrainiert werden. ■

Während es offensichtlich ist, dass jede erlernte Funktion von einem neuronalen Netz repräsentiert werden kann, ist die Umkehrung zwar wünschenswert, jedoch nicht allgemein gültig.

Kann jede repräsentierbare Funktion wirklich auch erlernt werden?

Für das Perzeptron kann die Frage bejaht werden. Das **Konvergenz-Theorem** 6.1 von Rosenblatt besagt, dass jede erlernbare Funktion in endlicher Zeit antrainiert werden kann. Was würde auch eine Funktion nützen, die das Netz einerseits zwar repräsentieren kann, andererseits aber ein Erlernen dieser Funktion unendlich lang dauerte?

Zum Lernen wird bei einem Perzeptron ein überwachtes Lernen auf der Grundlage der Delta-Regel verwendet.

6.1.1 Die Delta-Regel

Die Delta-Regel ist ein einfaches Verfahren zur Adaption der Gewichte innerhalb eines vorwärtsgerichteten Netzes mit nur einer Schicht von trainierbaren Verbindungen. Die **Delta-Regel** verändert die Gewichte der Verbindungen entsprechend dem Beitrag der Gewichte zum Netzfehler.

Als **Fehler** betrachten wir die Differenz zwischen einer erwarteten Ausgabe für ein bestimmtes Eingabemuster und der vom Netz tatsächlich berechneten Ausgabe. Der erwartete Ausgabewert (**teaching output**) wird zusammen mit den Eingabewerten vorgegeben.

Beispiel 6.1 Perzeptron für die UND-Funktion

Nehmen wir an, die Verbindungsgewichte w_1, w_2 seien am Anfang null: $w_1 = w_2 = 0.0$. Der Schwellwert des Ausgabeneurons ist $0.5 : \theta = 0.5$.

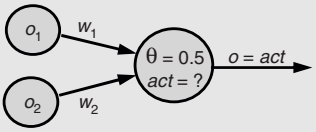


Bild 6.3 Ein Perzeptron für die UND-Funktion

Wird nun das Eingabemuster $x_1 = (o_1, o_2) = (1,1)$ angelegt, so berechnet das Perzeptron die folgende Ausgabe o:

$$net = w_1 \cdot o_1 + w_2 \cdot o_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.0$$

$$act = \begin{cases} 1, & x \geq \theta \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Unter Benutzung der angegebenen Schwellwertfunktion erhalten wir $o_{x_1} = 0$ als Ausgabewert für das erste Muster x_1. Damit kann der Fehler als Abweichung von der erwarteten Ausgabe, dem teaching output t, bestimmt werden:

$$err_{x_1} = t_{x_1} - o_{x_1} = 1 - 0 = 1.$$

Dieser Fehler wird nun zur Korrektur der Verbindungsgewichte benutzt. Durch die Multiplikation des Fehlers mit dem Ausgabewert wird erreicht, dass nur die Gewichte verändert werden, über deren Verknüpfung ein Beitrag zum Fehler zustande kam ($o_i \neq 0$):

$$w_1' = w_1 + err_{x_1} \cdot o_1 = 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

Analog ergibt sich

$$w_2' = 1$$

Als nächstes Muster zum Lernen betrachten wir: $x_2 = (1,0)$. Dabei stellt sich heraus: $err_{x_2} = t_{x_2} - o_{x_2} = 0 - 1 = -1$

und somit:

$$w_1'' = w_1' + err_{x_2} \cdot o_1 = 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

Führt man dieses fort, ergibt sich folgendes Verhalten:

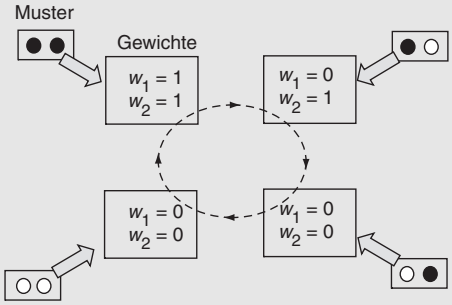


Bild 6.4 Entwicklung der Gewichte während des Trainings der vier Eingabemuster

w_2 bleibt beim Training dieses Musters unverändert, wird aber durch das Muster (0,1) dann ebenfalls auf 0 zurückgestellt. Die Gewichte oszillieren, ohne dass ein Lernen im Sinne einer Konvergenz der Gewichtswerte ersichtlich ist.

Abhilfe schafft eine Lernrate, die steuert, wie stark der Fehler bei der Korrektur der Gewichte berücksichtigt wird. Das Lernverfahren unter Nutzung der Delta-Regel wird durch den Algorithmus im Listing 6.1 beschrieben.

Listing 6.1 Algorithmus der Delta-Regel

```
PROCEDURE Delta-Regel
  REPEAT
    FOR m:=1 TO Anzahl Muster DO
        Muster_m an Eingabeschicht anlegen;
        Bestimme Ausgabewerte der Ausgabe-Neuronen;
        FOR j:=1 TO Anzahl Ausgabe-Neuronen DO
    (*)   IF teachoutput_j ≠ output_j THEN
            FOR i:=1 TO Anzahl Eingabe-Neuronen DO
    (**)      w_ij = w_ij + Lernfaktor * output_i * (teachoutput_j - output_j);
          END IF
        END FOR
    END FOR
    Test aller Muster;
  UNTIL gewünschtes Verhalten erreicht;
END Delta-Regel
```

Die Anweisung (*) im Listing 6.1 drückt aus, dass eine Gewichtsveränderung nur dann durchgeführt wird, falls die erwartete Ausgabe nicht mit der tatsächlichen Ausgabe übereinstimmt. Anweisung (**) beschreibt den Grad der Gewichtsänderung. Ist die erwartete Ausgabe (teachoutput) größer als die tatsächliche Ausgabe (output), müssen die Gewichte der eingehenden Verbindungen erhöht werden, damit eine Aktivierung des aktuellen Neurons wahrscheinlicher wird.

teachoutput > output
→ (teachoutput – output) > 0
→ Δw > 0 Das Gewicht wird vergrößert.

Analog wird das Gewicht verringert, falls die tatsächliche Ausgabe größer als die erwartete Ausgabe ist. Der Algorithmus wird nun auf das vorher betrachtete Beispiel des UND-Schalters angewendet.

Beispiel 6.2 Training des UND-Schalters mit der Delta-Regel

Die Änderung der Gewichte vollzieht sich entsprechend der Formel:

$w_i' = w_i + \lambda \cdot (t_x - o_x) \cdot o_i$

Im Beispiel sollte die Lernrate λ kleiner als der Schwellwert gewählt werden.

Wir probieren eine Lernrate von $\lambda = 0.2$ und erhalten:

$x_1 = (1,1) : w_1' = w_1 + \lambda \cdot \text{err} \cdot o_1 = 0 + 0.2 \cdot 1 \cdot 1 = 0.2.$ Analog $w_2 = 0.2$
$x = (1,0)$: Kein Fehler!

Analog stellen wir fest, dass auch die Muster (0,1) sowie (0,0) nun richtig erkannt werden. Für die richtige Erkennung des Musters $x_1 = (1,1)$ ist dann nur ein weiterer Lernschritt erforderlich. Führen Sie diesen durch!

Worin besteht nun die eingeschränkte Fähigkeit eines Perzeptrons?

Wenn Sie versucht haben, die Aufgabe 5.7 aus dem vorherigen Kapitel 5 zu lösen, werden Sie diese Beschränkung erkannt oder entnervt die Lösungssuche abgebrochen haben. Die XOR-Funktion lässt sich nicht mittels eines Perzeptrons realisieren.

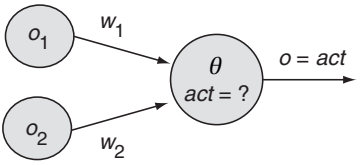


Bild 6.5 Ein Neuron und die XOR-Funktion

Warum kann eine solch einfache Funktion nicht durch ein Perzeptron dargestellt werden? Betrachten wir dazu das gewünschte Verhalten:

a) $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 < \theta$ Somit wird die Ausgabe 0 für (0,0) erzielt.
b) $0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \geq \theta$ Somit wird die Ausgabe 1 für (0,1) erzielt.
c) $1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \geq \theta$ Somit wird die Ausgabe 1 für (1,0) erzielt.
d) $1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 < \theta$ Somit wird die Ausgabe 0 für (1,1) erzielt.

Addiert man nun (b) und (c), so erhält man einen Widerspruch zur Forderung (d):

(b+c) $w_1 + w_2 \geq \theta$ (d) $w_1 + w_2 < \theta$

$w_1 + w_2$ kann nicht größer oder gleich und zugleich kleiner als irgendein Schwellwert sein. Es gibt keine Belegung der Gewichte w_1 und w_2 sowie des Schwellwertes θ, so dass die vier

obigen Gleichungen erfüllt sind. Die XOR-Funktion ist mit nur einem Neuron somit nicht darstellbar. Die darstellbaren Funktionen werden als linear separierbare Funktionen bezeichnet. Im zweidimensionalen Fall wird das Netzergebnis durch die Ungleichung

$$w_1 \cdot o_1 + w_2 \cdot o_2 \geq \theta$$

bestimmt. Setzt man die linke Seite der rechten Seite gleich, so ergibt sich eine Geradengleichung, die durch die beiden Gewichte und den Schwellwert bestimmt ist.

$$w_1 \cdot o_1 + w_2 \cdot o_2 = \theta$$

Diese Gerade teilt die Ebene in zwei Teile. Für jede Eingabe (o_1, o_2) ergibt sich ein Wert größer, kleiner oder gleich . Die Differenz $w_1 \cdot o_1 + w_2 \cdot o_2 - \theta$ gibt den Abstand des Punktes (o_1, o_2) von der trennenden Geraden an.

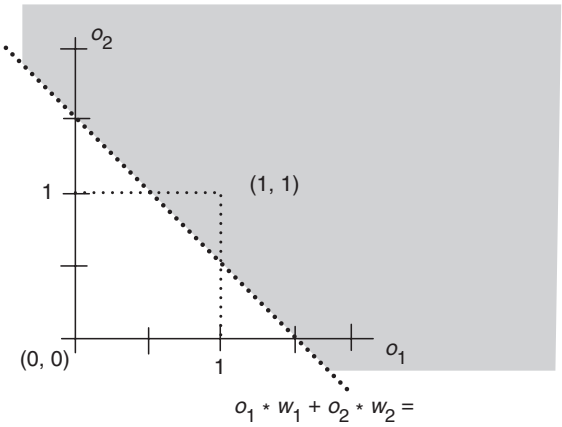


Bild 6.6 Lineare Separierbarkeit am Beispiel der UND-Funktion

Im Bild 6.6 ist die geometrische Veranschaulichung der linearen Separierbarkeit zu sehen. Als Beispiel wird ein Neuron benutzt, das die UND-Funktion realisiert.

Aus dem Bild wird ebenso deutlich, warum die XOR-Funktion nicht linear separierbar ist. Es gibt keine Gerade, die die Ebene so teilt, dass die Punkte (0,0) sowie (1,1) in einer gemeinsamen Halbebene liegen und die Punkte (0,1) sowie (1,0) in der anderen Halbebene. Für eine korrekte Realisierung der XOR-Funktion sind zwei Geraden notwendig, die die Ebene gewünscht unterteilen können.

Sinngemäß kann diese Betrachtung auf höherdimensionale Räume übertragen werden. Die Eingaben können als Punkte in einem n-dimensionalen Raum gesehen werden. Die Gleichung $X \cdot W = \theta$ beschreibt dann eine Hyperebene, die den Raum wiederum in zwei Teile unterteilt.

6.1.2 Musterzuordnungen

Ein Perzeptron kann recht gut unterschiedliche Musterzuordnungen erlernen. Die zwei folgenden Beispiele gehen stets von der Eingabe einer Dezimalziffer in ihrer Binärdarstellung aus. Als mögliche Ausgabe werden zwei verschiedene Decodierungen betrachtet.

Als Ausgabe betrachten wir im ersten Fall die Zahl in ihrer unären Darstellung. Landläufig wird man von einer der Zahl entsprechenden Anzahl von Einsen sprechen. So entspricht das Eingabemuster 0101 der Darstellung: 1111 1000 00 (Bild 6.7).

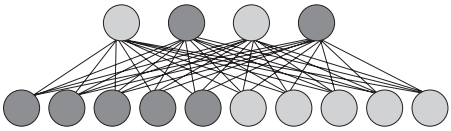


Bild 6.7 Netz-Ausgabe für die Eingabe des Binärcodes der Ziffer 5 im Fall 1

Im zweiten Fall wird jeder Zahl eine Klasse zugeordnet, wobei nur genau das eine Ausgabe-Neuron, welches diese Klasse vertritt, aktiviert wird: Die binäre Eingabe 0101 führt dann zur Aktivierung des Ausgabe-Neurons der sechsten Klasse: 0000 0010 00 (Bild 6.8).

Warum wird die binäre Fünf der sechsten und nicht der fünften Klasse zugeordnet?

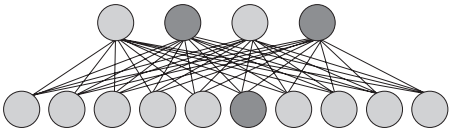


Bild 6.8 Netz-Ausgabe für die Eingabe des Binärcodes der Ziffer 5 im Fall 2

Damit ist auch die Netzarchitektur für beide Anwendungen bestimmt: vier Eingabe- und zehn Ausgabe-Neuronen. Wir nehmen zehn Ausgabeeinheiten, um dieses Netz sowohl für den Fall 1 als auch für den Fall 2 trainieren zu können.

Diese beiden Probleme sind gut für einen eigenen Programmiereinstieg geeignet, siehe Aufgaben 6.4-6.6.

In ähnlicher Weise kann ein einfacher Musterklassifikator für Großbuchstaben entwickelt werden, der zum Beispiel von einer 5*7 großen, binären Darstellung eines Zeichens ausgeht.

Übung 6.1 Perzeptron

Wie ist ein Perzeptron aufgebaut und welche Probleme können damit gelöst werden?

Übung 6.2 Delta-Regel

Wie erfolgt das Lernen anhand von Beispielen mittels der Delta-Regel?

Übung 6.3 Identität

Beweisen Sie, dass die Identitätsfunktion für zwei Eingaben nicht mittels eines Perzeptrons dargestellt werden kann. (Id(0,0) = Id(1,1) = 1 sowie Id(0,1) = Id(1,0) = 0)

Übung 6.4 Codierungen

Programmieren Sie für die beiden genannten Decodierprobleme je ein Perzeptron. Implementieren Sie einen Lernalgorithmus auf Basis der Delta-Regel. Als Programmiersprache ist jede prozedurale oder objektorientierte Sprache geeignet. Die Trainingsmuster sind in einer Textdatei zu verwalten:

```
// Trainingsmuster für Perzeptron zur Erkennung
// einer Binärdarstellung
4  // Zahl der Eingabe-Neuronen
10 // Zahl der Ausgabe-Neuronen
10 // Zahl der Trainingsmuster

0000              // 1. Trainingsmuster - Eingabe
1000 0000 00      // 1. Trainingsmuster - Ausgabe
0001              // 2. Trainingsmuster - Eingabe
0100 0000 00      // 2. Trainingsmuster - Ausgabe
0010
...
```

Hier ist das Decoder-Netz im Netzeditor-Fenster des JavaNNS dargestellt.

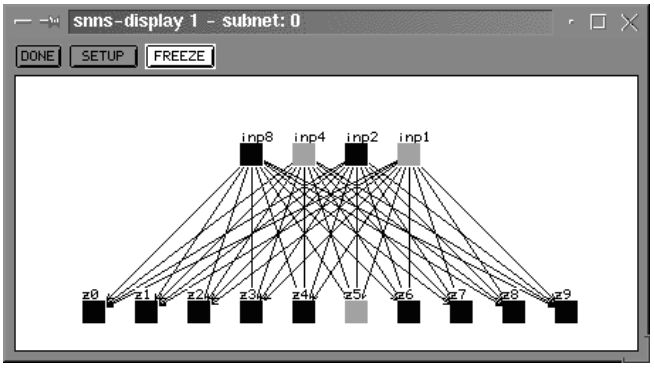


Bild 6.9 Decoder-Netz im Netzeditor-Fenster des JavaNNS

Übung 6.5 Arbeiten mit dem JavaNNS

Nachdem Sie erfolgreich ein kleines neuronales Netz in C, C++, Java oder Python programmiert haben, machen Sie sich mit dem Stuttgarter Neuronale Netze Simulator (JavaNNS) vertraut. Nutzen Sie zum Trainieren die Standard-Backpropagation-Lernfunktion. Wählen Sie die logistische Funktion als Aktivierungsfunktion und initialisieren Sie die Gewichte mit Zufallszahlen. Überprüfen Sie nach jedem einmaligen Anlegen aller Trainingsmuster, ob das gewünschte Ergebnis erreicht wird.

Übung 6.6 Lernverhalten

Welche Zahl von Durchläufen benötigen Sie für die verschiedenen Implementierungen und die beiden unterschiedlichen Aufgabenstellungen? Welche der beiden Decodierungen ist schneller zu erlernen?

6.2 Backpropagation-Netze

Für das Training des oben beschriebenen Perzeptrons im JavaNNS wird auf den Backpropagation-Algorithmus verwiesen. Dieser Algorithmus ist für die Aufgabe nicht notwendig. Für das Trainieren eines Netzes mit nur einer trainierbaren Schicht von Verbindungen ist die Delta-Regel völlig ausreichend.

Allerdings ist die Delta-Regel auch nur dann anwendbar, falls

1. überwacht gelernt werden kann und
2. nur eine Schicht trainierbarer Gewichte im Netz vorhanden ist.

In einem vorwärtsgerichteten Netz mit mindestens einer inneren Schicht von Neuronen sind mehrere Verbindungsschichten zu trainieren. Das ist das Einsatzgebiet des Backpropagation-Trainingsalgorithmus. Wie die Diskussion um das neuronale Netz zur Repräsentation der XOR-Funktion gezeigt hat, gibt es Netze, die ohne innere Schichten die gewünschte Aufgabe nicht lösen können.

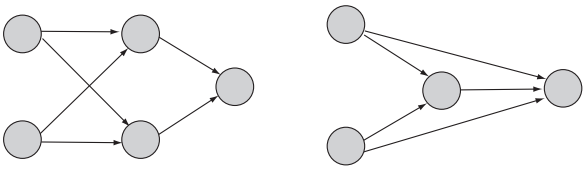


Bild 6.10 Zwei mögliche Netze für das XOR-Problem

Wird an der Eingabeschicht eines Netzes ein **Trainingsmuster** angelegt, so stellen die Ausgabewerte der Ausgabe-Neuronen nach der Verarbeitung der Netzeingabe eine Reaktion auf das Muster dar. Für ein Ausgabe-Neuron kann somit der **Fehler** bestimmt werden, indem die Abweichung des berechneten Ausgabewertes vom dem erwarteten Ausgabewert, der **Trainingsausgabe** (teaching output), bestimmt wird. Wie wird mit Neuronen der inneren Schicht verfahren? Für diese Neuronen existiert keine erwartete Ausgabe.
Wie können Verbindungsgewichte verändert werden, wenn der Fehler für die inneren Neuronen nicht direkt durch Vergleich mit einem erwarteten Wert bestimmt werden kann (Bild 6.11)?

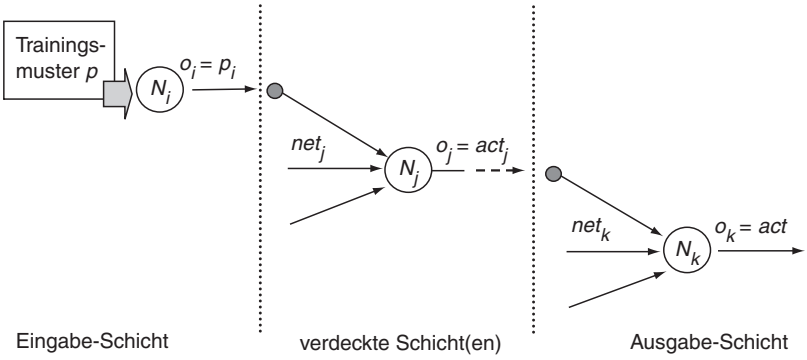


Bild 6.11 Propagierung in einem mehrschichtigen vorwärtsgerichteten Netz

Hier setzt das Backpropagation-Lernverfahren an. Anhand des Backpropagation-Algorithmus wird im folgenden Abschnitt das Mysterium des „lernenden Netzes“ entzaubert. „Lernen“ ist hier Mathematik pur: Mittels mathematischer Verfahren wird der Netzfehler minimiert.

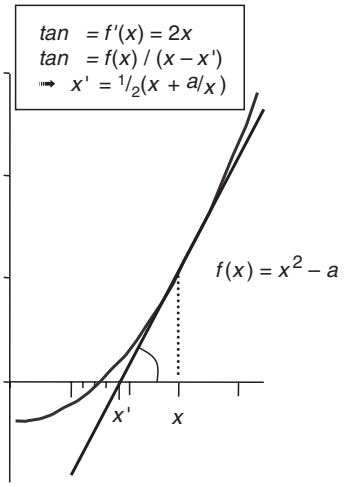


Bild 6.12 Newton-Verfahren

Eines der ältesten Verfahren dieser Art ist der Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung einer Quadratwurzel, ein Spezialfall des Newton-Verfahrens, Bild 6.12. Dabei wird zwar eine Nullstelle und nicht das Minimum der Funktion gesucht, die Vorgehensweise zur Bestimmung der Lösung unter Nutzung des Kurvenanstiegs, ist jedoch gleich.

$$x' = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Für die Funktion $f(x) = x^2 - a$ wird eine Nullstelle, ausgehend von einem Näherungswert x, gesucht. Die Formel für den nächsten Näherungswert x' lässt sich leicht aus der graphischen Darstellung des Sachverhaltes ableiten.

6.2.1 Das Backpropagation-Verfahren

Ähnlich der näherungsweisen Bestimmung der Wurzel einer Zahl funktionieren **Gradientenabstiegsverfahren**, wie sie zur Minimierung des Netzfehlers eingesetzt werden. Beim Trainieren eines neuronalen Netzes wird der Fehler der Ausgabe eines Neurons j als Funktion der Gewichte aller eingehenden Netzverbindungen betrachtet:

$$E(W_j) = E(w_{1j}, w_{2j}, \ \ldots\ , w_{nj})$$

Für zwei eingehende Verbindungen w_1 und w_2 kann diese Situation durch eine Darstellung der Fehlerkurve veranschaulicht werden (Bild 6.13 auf der nächsten Seite). Man sucht nun Gewichte, so dass die Fehlerfunktion ein Minimum annimmt. Um in ein Tal der Fehlerfunktion zu gelangen, müssen die Gewichte geeignet verändert werden.

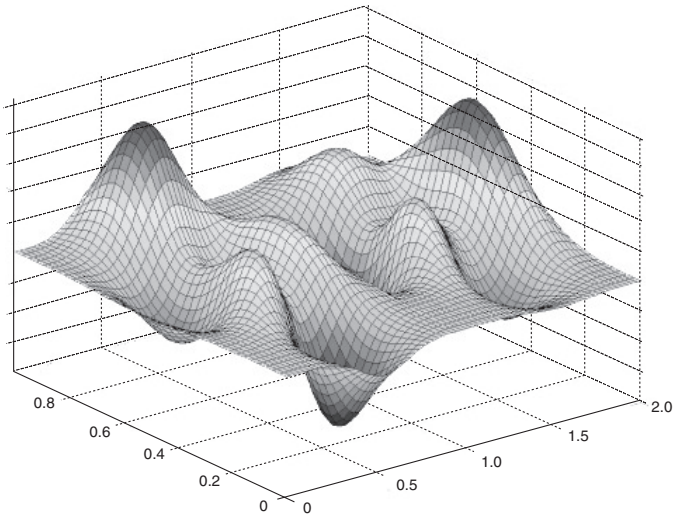


Bild 6.13 Eine mögliche Fehlerkurve, erzeugt durch zwei Gewichte

Definition 6.1 Backpropagation-Lernverfahren

Das Backpropagation-Lernverfahren ist ein Verfahren des überwachten Lernens zum Anpassen der Verbindungsgewichte. Die Gewichtsänderung erfolgt ausgehend von einem aus der Abweichung der berechneten Ausgabe von der erwarteten Ausgabe bestimmten Fehlersignal. Die Gewichtsänderung wird schichtenweise, beginnend mit den Verbindungen zur Ausgabeschicht rückwärts in Richtung Eingabeschicht, vorgenommen.

Das oben erwähnte Newton-Verfahren basiert auf der ersten Ableitung der Funktion. Für einen Punkt (x, y) der Kurve $f(x)$ gibt die erste Ableitung den Anstieg $f'(x)$ der Kurve $f(x)$ in diesem Punkt an. Das ist der eindimensionale Fall. Im mehrdimensionalen Fall gibt der **Gradient** den Betrag und die Richtung des stärksten Anstiegs an.

Wird nun eine mehrstellige Funktion partiell nach einer Variablen abgeleitet, so entspricht dies einer Projektion des Gradienten auf die Richtung dieser Variablen. Es lässt sich somit die partielle erste Ableitung der Fehlerfunktion nach einer Gewichtsvariablen für die Korrektur des Gewichts heranziehen:

$$\Delta w_{ij} = -\lambda \cdot \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} \tag{6.1}$$

Der Faktor λ stellt die **Lernrate** dar und steuert den Grad der Änderung des Gewichtes. Das negative Vorzeichen kennzeichnet die Veränderung entgegen dem Kurvenanstieg in Richtung eines Tals der Fehlerkurve. Der Fehler und damit die Änderung des Gewichtes sind abhängig vom Trainingsmuster.

Beim so genannten **Batch-Verfahren** wird eine Gewichtsänderung erst nach der Bearbeitung des gesamten Satzes von Trainingsmustern vorgenommen. Alle folgenden Betrachtungen be-

ziehen sich auf einen Lernschritt in Folge der Bearbeitung eines Musters. Diese Vorgehensweise wird als **Online-Verfahren** bezeichnet. Das Online-Trainingsverfahren ändert nach jedem einzelnen Muster die Verbindungsgewichte.

Die Betrachtung der Online-Variante erlaubt es, in den Formeln auf die Kennzeichnung des Musters zu verzichten. Damit vereinfachen sich die nachfolgenden Formeln. *Id* bezeichnet wieder die identische Funktion.

Ein Fehler ist eine Abweichung der Ausgabe von der erwarteten Ausgabe. Der Zusammenhang zwischen der Ausgabe und dem Verbindungsgewicht ergibt sich aus der Arbeitsweise eines Neurons:

$$o_j = f_{out}(f_{act}(net_j)) \qquad net_j = \sum_i o_i \cdot w_{ij} \qquad f_{out} = Id \tag{6.2}$$

Die Ausgabe eines Neurons wird mittels der Ausgabefunktion aus der Aktivierung des Neurons bestimmt. Die Aktivierung wird durch Anwendung der Aktivierungsfunktion auf die Netzeingabe berechnet. Die Netzeingabe wiederum ist von den Werten der Verbindungsgewichte abhängig.

Die Formel 6.1 kann somit konkretisiert werden und zeigt dann den Zusammenhang zwischen Fehler und Gewicht auf:

$$\Delta w_{ij} = -\lambda \cdot \frac{\partial E}{\partial o_j} \cdot \frac{\partial o_j}{\partial net_j} \cdot \frac{\partial net_j}{\partial w_{ij}} \tag{6.3}$$

Der Fehler ist abhängig vom Ausgabewert, der Ausgabewert ist abhängig von der Netzeingabe und diese wiederum ist abhängig von dem einzelnen Gewicht.

Die drei Komponenten der Formel 6.3 werden nun in umgekehrter Reihenfolge erläutert:

1. Die Abhängigkeit der Netzeingabe von einem Verbindungsgewicht w_{ij} wird durch die Summenformel für die Netzeingabe deutlich. Differenziert nach einem konkreten Gewicht w_{ij}, entfallen alle Summanden bis auf den einen Summanden $k = i$, der w_{ij} enthält:

$$\frac{\partial net_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \sum_k o_k \cdot w_{kj} = o_i \tag{6.4}$$

2. Die Abhängigkeit der Ausgabe von der Netzeingabe ist durch die Aktivierungsfunktion gegeben, vorausgesetzt, als Ausgabefunktion findet die Identität Verwendung. Im Folgenden wird die identische Ausgabefunktion in den Formeln weggelassen.

$$\frac{\partial o_j}{\partial net_j} = \frac{\partial f_{act}(net_j)}{\partial net_j} = f'_{act}(net_j) \tag{6.5}$$

   Dies funktioniert nur, falls die Aktivierungsfunktion differenzierbar ist. Die Schwellwertfunktion ist nicht differenzierbar. Man hilft sich zum einen mit der Identität als Aktivierungsfunktion $f_{act} = Id$, somit $f'_{act} = 1$. Zum anderen wird für den Backpropagation-Algorithmus die häufig verwendete logistische Funktion benutzt, deren erste Ableitung einfach zu berechnen ist:

$$f_{Logistic}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$f'_{Logistic}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = f_{Logistic}(x) \cdot (1 - f_{Logistic}(x)) \tag{6.6}$$

Damit erhält man:

$$\frac{\partial o_j}{\partial net_j} = f_{Logistic}(net_j) \cdot (1 - f_{Logistic}(net_j)) = o_j \cdot (1 - o_j) \tag{6.7}$$

3. Der Fehler kann nur für ein Ausgabe-Neuron direkt als Differenz zwischen dem Trainingswert t_j und der berechneten Ausgabe o_j ausgedrückt werden:

$$E = \frac{1}{2}\sum_j (t_j - o_j)^2 \tag{6.8}$$

Hierbei wird das Quadrat benutzt, um zu verhindern, dass sich negative und positive Abweichungen gegenseitig aufheben. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ändert inhaltlich nichts, vereinfacht jedoch den Ausdruck der ersten Ableitung:

$$\frac{\partial E}{\partial o_j} = \frac{\partial}{\partial o_j}\left(\frac{1}{2}\sum_j (t_j - o_j)^2\right) = -(t_j - o_j) \tag{6.9}$$

Für ein inneres Neuron wird der Fehler aus den Fehlersignalen der nachfolgenden Neuronen ermittelt:

$$\frac{\partial E}{\partial o_j} = -\sum_k \frac{\partial E}{\partial net_k} \cdot \frac{\partial net_k}{\partial o_j} = \sum_k \left(\delta_k \cdot \frac{\partial}{\partial o_j}\sum_i o_i \cdot w_{ik}\right) = \sum_k \delta_k \cdot w_{jk} \tag{6.10}$$

Das **Fehlersignal** δ ist dabei als Produkt des ersten und zweiten Faktors der Gleichung (6.3) definiert:

$$\delta_j = \frac{\partial E}{\partial net_j} \tag{6.11}$$

Zusammenfassend ergibt sich für das Fehlersignal δ unter Verwendung der logistischen Funktion als Aktivierungsfunktion:

$$\delta_j = \begin{cases} o_j \cdot (1 - o_j) \cdot (t_j - o_j) & \text{falls } j \text{ Ausgabe-Neuron} \\ o_j \cdot (1 - o_j) \cdot \sum_k \delta_k \cdot w_{jk} & \text{falls } j \text{ inneres Neuron} \end{cases} \tag{6.12}$$

Damit wird das Fehlersignal eines Neurons einer inneren Schicht anhand der Fehlersignale aller nachfolgenden Zellen und der zugehörigen Verbindungsgewichte bestimmt. Folglich müssen zuerst die Fehlersignale der Ausgabe-Neuronen bestimmt werden, dann können die Fehlersignale der Neuronen der „letzten“ inneren Schicht berechnet werden, danach der „vorletzten“ Schicht und so weiter bis zur ersten inneren Schicht. Der Fehler wird von der Ausgabeschicht zur ersten inneren Schicht zurück geleitet. Das Backpropagation-Lernverfahren ist demzufolge ein **„backpropagation of error“-Algorithmus**.

Listing 6.2 Backpropagation Algorithmus

```
PROCEDURE BACKPROPAGATION
  nZyklen:=0;
  REPEAT
    fehler := 0;
    nZyklen := nZyklen + 1;
    FOR i := 1 .. AnzahlMuster DO
      Muster i anlegen;
      FOR j := 1 .. AnzahlOutputNeuron DO
        Bestimme Ausgabewert o_j;
        Bestimme Fehlerwert f_j:= t_j - o_j;
        Bestimme Fehlersignal fsig_j := o_j * (1-o_j) * f_j;
        fehler := fehler + f_j^2;
      END FOR
      FOR s:=Ausgabeschicht-1 DOWNTO ErsteSchicht DO
        FOR k:=1 .. AnzahlNeuronenSchicht_s DO
          fsum:=0;
          FOR m:=1 .. AnzahlNeuronenSchicht_(s+1) DO
            fsum:= fsum + w_km * fsig_(s+1)m;
          END FOR
          fsig_sk := o_sk * (1 - o_sk)*fsum;
          FOR m:=1 .. AnzahlNeuronenSchicht_(s+1) DO
            w_km := w_km + Lernrate * o_sk * fsig_(s+1)m;
          END FOR
        END FOR
      END FOR
    END FOR;
  UNTIL fehler < tolerierbarerFehler OR Zyklenzahl erreicht
END BACKPROPAGATION
```

Die Änderung eines Verbindungsgewichtes erfolgt nicht nur im Backpropagation-Lernalgorithmus unter Berücksichtigung des Lernfaktors λ:

$$\Delta w_{ij} = \lambda \cdot o_i \cdot \delta_j$$

Das neue veränderte Gewicht w'_{ij} wird somit wie folgt berechnet:

$$w'_{ij} = w_{ij} + \lambda \cdot o_i \cdot \delta_j$$

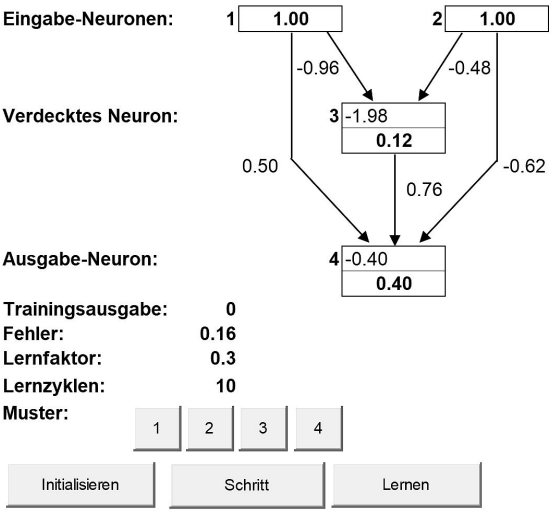
Wird statt der logistischen Funktion der Tangens Hyperbolicus als Aktivierungsfunktion benutzt, ergeben sich für die Bestimmung des Fehlersignals diese Berechnungen:

$$\delta_j = \begin{cases} (1-o_j^2)\cdot(t_j - o_j) & \text{falls } j \text{ Ausgabe-Neuron} \\ (1-o_j^2)\cdot\sum\limits_k \delta_k \cdot w_{jk} & \text{falls } j \text{ inneres Neuron} \end{cases} \tag{6.13}$$

6.2.2 Das XOR-Backpropagation-Netz

Die Theorie wird nun am Beispiel des Netzes für die XOR-Funktion erläutert. Am besten eignet sich dazu eine Tabellenkalkulation.

Ein entsprechendes EXCEL-Dokument ist auf den WWW-Seiten zum Buch verfügbar.



Gewichtsmatrix

Neuron	1	2	3	4
1			-0.9595	0.5010
2			-0.4776	-0.6157
3				0.7553
4				
On			-0.5472	-0.3771

Neuron	Fehlersignal σ_i	Änderungen der Gewichte Δw_{ij}	
1		-0.0023	-0.0289
2		-0.0023	-0.0289
3	-0.0077		-0.0035
4	-0.0964		
On		-0.0023	-0.0289

Neue Gewichte w'_{ij}

Neuron	3	4
1	-0.9618	0.4721
2	-0.4799	-0.6446
3		0.7518
4		
On	-0.5495	-0.4061

Bild 6.14 Das Tabellenblatt für das Training eines XOR-Netzes

Das Nachbauen ist nicht schwer und ein gutes Training. Die Schaltknöpfe im Bild 6.14 dienen der Aktivierung von Makros, die das Experimentieren erleichtern:

1 ... 4 Das entsprechende Eingabemuster (0,0); (1,0); (0,1); (1,1) wird als Aktivierung der Eingabe-Neuronen gesetzt. Danach kann sofort die vom Netz berechnete Ausgabe am Neuron 4 abgelesen werden.

Initialisieren Die Gewichtsmatrix erhält neue, zufällige Werte aus dem Bereich (-1, +1).

Schritt Aus der aktuellen Netzausgabe wird der Fehler und daraus das Fehlersignal für die Neuronen 3 und 4 berechnet. Unter Berücksichtigung des Lernfaktors werden die Gewichtsänderungen und die neuen Gewichte bestimmt. Die neuen Gewichte werden in die Gewichtsmatrix übernommen.

Lernen Jedes Lernmuster wird einmal angelegt und die entsprechende Gewichtsanpassung vorgenommen. Dieser Lernzyklus wird so oft wiederholt, wie unter Lernzyklen angegeben.

Die Neuronen 1 und 2 stellen nur das Eingabemuster zur Verfügung und benötigen deshalb weder Schwellwert noch Aktivierungsfunktion. Formal ergibt sich die Aktivierung aus der Eingabe, die Ausgabefunktion ist die identische Funktion.

In diesem Beispiel werden die Schwellwerte der Neuronen (3 und 4) mit trainiert. Das Trainieren der Schwellwerte erleichtert den Anpassungsprozess, das Lernen wird erheblich beschleunigt. Dazu betrachtet man einen Schwellwert als Verbindungsgewicht von einem extra Neuron, dem so genannten **On-Neuron**, zum jeweiligen Neuron.

Das On-Neuron hat die konstante Aktivierung 1.0, so dass die Netzeingabe als gewichtete Summe über alle Vorgängerneuronen den Schwellwert als Verbindung vom On-Neuron mit enthält:

$$net_j = \sum_i o_i \cdot w_{ij} + w_{Onj} \cdot 1.0$$

Das Gewicht der Verbindung vom On-Neuron zu einem Neuron j entspricht dann genau dem negativen Wert des Schwellwertes θ: $w_{Onj} = -\theta$. Statt $-w_{Onj}$ benutzt man nach wie vor die Bezeichnung $bias_j$ oder θ_j für den Schwellwert. Die Änderung eines Schwellwertes erfolgt damit analog zur Änderung eines Gewichts.

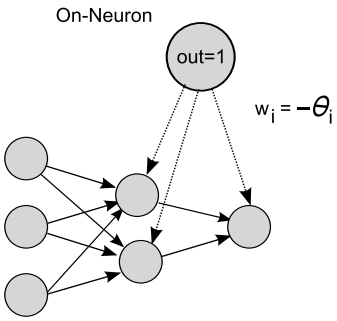


Bild 6.15 Verwendung eines On-Neurons zur Schwellwertbehandlung

Tabelle 6.1 Formeln des Backpropagation-Algorithmus für das XOR-Netz

	Neuron3	Neuron4
Netz-Eingabe	net3= w13*out1+ w23*out2+ bias3	net4= w14*out1 + w24*out2 + w34*out3 + bias4
Ausgabe	out3= 1/(1+exp(-net3))	out4= 1/(1+exp(-net4))
Fehlersignal	delta3= out3*(1-out3)*delta4*w34	delta4= out4 * (1-out4) * (teach-out4)
Gewichtsänderung	dw13= lf*out1*delta3 dw23= lf*out2*delta3 dbias3= lf*delta3	dw14= lf*out1*delta4 dw24= lf*out2*delta4 dw34= lf*out3*delta4 dbias4= lf*delta4
Neue Gewichte	w13' = w13+dw13 w23' = w23+dw23 bias3' = bias3+dbias3	w14' = w14+dw14 w24' = w24+dw24 w34' = w34+dw34 bias4' = bias4+dbias4

Die Gewichte im Netz-Diagramm werden direkt aus der Gewichtsmatrix übernommen. In der Tabelle 6.1 sind die Formeln für die Berechnung der Netzausgabe sowie zur Berechnung der Gewichtsänderung entsprechend dem Backpropagation-Algorithmus angegeben.

Ein Training dieses Netzes bis zu einer Gewichtsanpassung, die die gewünschte XOR-Funktion repräsentiert, ist recht aufwändig. Die Experimente unter EXCEL zeigen, dass das Netz nicht alle Muster in jedem Training lernt.

Häufig werden nur drei der vier Muster antrainiert, das Muster (0,0) produziert dann auch das Ergebnis 1.0. Aus Sicht des Backpropagation-Algorithmus gelangt das Netz in ein lokales Fehlerminimum und kann dieses dann nicht mehr verlassen.

Ist die Ausgabe erst einmal sehr nahe an dem Wert 1.0 (oder 0.0) angekommen, ist keine entscheidende Korrektur mehr zu erwarten, wie aus der Formel des Fehlersignals ersichtlich ist. Unabhängig vom Wert des Fehlers ist das Fehlersignal dann 0.0 und Gewichtsänderungen finden nicht mehr statt. Aus der Formel für das Fehlersignal ist erkennbar, dass das Fehlersignal

betragsmäßig sehr klein wird, falls die Ausgabe out4 nahe 0.0 oder nahe 1.0 ist. Wir setzen voraus, dass ein Fehler $\text{teach} - \text{out}_4 \neq 0$ vorhanden ist und eine Anpassung dadurch erforderlich wird.

$$\text{delta}_4 = \text{out}_4 \cdot (1 - \text{out}_4) \cdot (\text{teach} - \text{out}_4)$$

Erfolgreich ist man dann, wenn die aus dem Bereich (-1, +1) zufällig ausgewählten Anfangsgewichte für alle vier Muster zu einer Netzausgabe out_4 nahe 0.5 führen.

Mit Gewichten, die diese Bedingung erfüllen, kann man nach ca. 500 Lernzyklen die Tendenz zum Lernen aller vier Muster erkennen, wie aus Tabelle 6.2 ersichtlich ist.

Tabelle 6.2 Ergebnisse des Backpropagation-Algorithmus für das XOR-Problem

Eingabe	Ausgabe nach 600	700	800	900	1000 Zyklen
(0,0)	0.37	0.27	0.21	0.17	0.14
(0,1)	0.54	0.62	0.70	0.75	0.79
(1,0)	0.55	0.63	0.71	0.76	0.79
(1,1)	0.45	0.38	0.31	0.26	0.22

6.2.3 Modifikationen des Backpropagation-Algorithmus

Um eventuelle Schwierigkeiten zu erkennen, die beim Training eines Netzes mittels des Backpropagation-Lernalgorithmus auftreten können, werden mögliche Kurven einer Fehlerfunktion betrachtet. Es wird die Fehlerkurve in Abhängigkeit von einem Gewicht dargestellt.

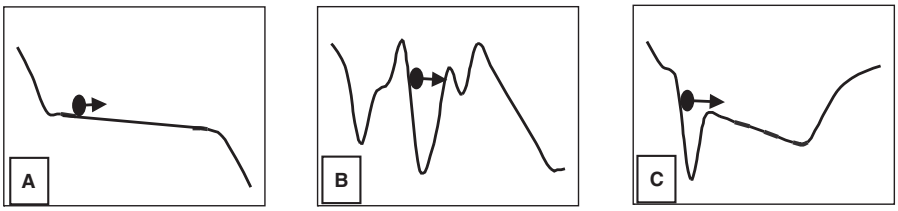


Bild 6.16 Fehlerkurven A: flach; B und C: steile Schluchten

Eine **Fehlerkurve** kann sowohl stark zerklüftete Abschnitte, als auch lange, flache Abschnitte aufweisen. In beiden Fällen kann das Verändern der Gewichte entsprechend dem Backpropagation-Algorithmus unerwünschte Effekte zur Folge haben. Die Probleme resultieren daraus, dass zur Veränderung eines Gewichtes der Anstieg der Fehlerkurve, allgemein der Gradient, herangezogen wird. Die unerwünschten Folgen werden anhand der Kurven A, B und C diskutiert.

- **Kurve A**: Die Kurve ist sehr flach, der Anstieg betragsmäßig sehr klein. Die Gewichtsänderung fällt damit ebenso betragsmäßig klein aus und das Gewicht verändert sich nur unwesentlich. Der Trainingsprozess nimmt unverhältnismäßig viel Zeit in Anspruch.

- **Kurve B**: In steilen Schluchten der Kurve ist der Anstieg betragsmäßig sehr hoch. Trotzdem können negative Effekte auftreten. So kann ein Schwingen der Gewichtswerte um das Minimum herum auftreten. Die Änderung der Gewichte führt dazu, dass von einer „Wand“ zur anderen gesprungen wird; die betragsmäßig hohen Gewichte verhindern oder bremsen zumindest ein Einpegeln in die Talsohle, in das Minimum.
- **Kurve C**: Der hohe Änderungswert, hervorgerufen durch die „steile Wand“ am linken Rand, kann dazu führen, dass das Minimum übersprungen wird und das Gewicht Werte annimmt, die nur zu einem lokalen Minimum führen.

Es wurde eine Reihe von Verfahren vorgeschlagen, um die genannten Probleme zu vermeiden. Die nachfolgend aufgeführten Verfahren können im JavaNNS eingesetzt werden:

- **Backpropagation mit Momentum:**
  Es wird zusätzlich die vorherige Gewichtsänderung $\Delta w_{ij}(t-1)$ zum Zeitpunkt $t-1$ mit einbezogen. Ein Faktor μ zwischen 0 und 1 steuert den Anteil dieser Veränderung, so dass sich die aktuelle Gewichtsänderung zum Zeitpunkt t wie folgt formulieren lässt:
  $$\Delta w_{ij}(t) = \lambda \cdot o_i \cdot \delta_j + \mu \cdot \Delta w_{ij}(t-1)$$
- **QuickProp:**
  Das QuickProp-Verfahren greift bei der Bestimmung der Gewichtsänderung auf die Annahme zurück, dass sich die Fehlerfunktion durch eine quadratische Funktion besser lokal approximieren lässt und somit der optimale Wert für ein Gewicht schneller gefunden werden kann. Zur Bestimmung der quadratischen Funktion werden die letzten beiden Gewichtswerte $w_{ij}(t-1)$, $w_{ij}(t-2)$ herangezogen.
- **Resilient Propagation (RPROP):**
  Resilient heißt federnd. Das Verfahren ändert die Gewichte nicht entsprechend dem Betrag des Gradienten, sondern nutzt nur sein Vorzeichen. Dazu wird das Vorzeichen des Kurvenanstiegs zum Zeitpunkt t sowie zum vorherigen Zeitpunkt $t-1$ herangezogen. Vorzeichen und Betrag werden getrennt bestimmt. Haben die beiden letzten Anstiege dieselbe Richtung, wird eine betragsmäßig höhere Veränderung in diese Richtung vorgenommen. Waren die Anstiege von unterschiedlichem Vorzeichen, wird die letzte Änderung zurückgenommen und das Gewicht mit kleineren Beträgen verändert.
  Da das Rprop-Verfahren gute Trainingsergebnisse zeigt, werden wir hier die Formeln angeben, wie sie im JavaNNS verwendet werden:
  $$\Delta w_{ij}(t) = \begin{cases} -\Delta_{ij}(t) & \text{falls } S(t-1) > 0 \text{ und } S(t) > 0 \\ \Delta_{ij}(t) & \text{falls } S(t-1) < 0 \text{ und } S(t) < 0 \\ -\Delta_{ij}(t-1) & \text{falls } S(t-1) \cdot S(t) < 0 \\ -\text{sgn}(S(t)) \cdot \Delta_{ij}(t) & \text{sonst} \end{cases}$$
  Um ein Hin- und Herschwingen zu vermeiden wird im dritten Fall der Formel dann $S(t) = 0$ gesetzt. Der Betrag der Gewichtsänderung wird getrennt bestimmt. Dabei werden zwei Parameter η^+ und η^- eingesetzt, für die gilt: $0 < \eta^- < 1 < \eta^+$. Konkret werden häufig die folgenden Werte benutzt: $\eta^- = 0.5$ sowie $\eta^+ = 1.2$.
  $$\Delta_{ij}(t) = \begin{cases} \Delta_{ij}(t-1) \cdot \eta^+ & \text{falls } S(t-1) \cdot S(t) > 0 \\ \Delta_{ij}(t-1) \cdot \eta^- & \text{falls } S(t-1) \cdot S(t) < 0 \\ \Delta_{ij}(t-1) & \text{sonst} \end{cases} .$$
- **Backpercolation:**
  Dieses Verfahren (Untertunnelung) liefert für viele Anwendungen die schnellste Anpassung

der Gewichte. Es wurde insbesondere für Netze mit mehreren inneren Schichten entwickelt. Die Gewichtsänderungen beim Backpropagation-Algorithmus werden von Schicht zu Schicht kleiner, so dass die Anpassung der ersten Schicht erschwert wird. Backpercolation greift hier ein und ermöglicht auch für die vorderen inneren Schichten höhere Änderungsraten der Gewichte und beschleunigt somit den Anpassungsprozess. Eine detaillierte Vorgehensweise ist in [Zel97] beschrieben.

Übung 6.7 Berechnung der Ausgabe

Wie berechnet ein vorwärtsgerichtetes neuronales Netz eine Ausgabe?

Übung 6.8 Backpropagation

Erläutern Sie das Prinzip des Backpropagation-Algorithmus.

Übung 6.9 Fehler-Signal

Wie wird das Fehler-Signal eines Neurons bestimmt?

Übung 6.10 Gewichtsänderung

Wie werden die Gewichte während des Lernprozesses verändert?

Übung 6.11 Aktivierungsfunktion

Welche Aktivierungsfunktionen werden in vorwärtsgerichteten Netzen verwendet? Beschreiben Sie auch die Rolle, die diese Funktionen für den Lernalgorithmus spielen.

Übung 6.12 Schwellwert

Welchen Einfluss hat der Schwellwert auf ein Ergebnis?

Übung 6.13 Behinderungen

Welche Situationen können den Lernprozess behindern?

Übung 6.14 XOR

Entwickeln Sie ein XOR-Netz in einem Tabellenkalkulationsprogramm. Wo liegen Ihrer Meinung nach die Grenzen für eine derartige Realisierung?

Übung 6.15 XOR

Nutzen Sie Ihre Erfahrungen bei der Implementation eines Perzeptrons und implementieren Sie das XOR-Netz in einer Programmiersprache Ihrer Wahl. Implementieren Sie den Backpropagation-Algorithmus und trainieren Sie das Netz. Wie viele Trainingszyklen benötigen Sie, damit das Netz alle Trainingsmuster richtig erkennt?

Übung 6.16 Klassifikation von Kreditnehmern

Bauen Sie die skizzierten Netze zur Klassifizierung von Kreditnehmern im javaNNS nach. Entwickeln Sie entsprechend den vorgestellten Codierungen Mustertrainingsdaten und vergleichen Sie die Netzergebnisse.

Wie wird in Ihrem Netz ein Kunde mit den Werten „unbekannte Vergangenheit, wenig Schulden, vorhandene Sicherheiten, niedriges Einkommen“ eingestuft?

Wie verhält sich das Netz, falls die Zahl der Neuronen in der inneren Schicht verringert wird?

Übung 6.17 Modifikationen des Backpropagation

Stellen Sie ausführlich die verschiedenen Verbesserungen des Backpropagation-Algorithmus vor.

6.3 Typische Anwendungen

Rein vorwärtsgerichtete Netze mit mehreren trainierbaren Schichten stellen die häufigste Form praktisch eingesetzter neuronaler Netze dar. Die Palette der Anwendungen ist groß:

- **Klassifikation**
  von Daten, Mustern, sind ein häufiger Anwendungsfall insbesondere für Netze mit einer Ausgabe-Schicht von binären Neuronen. Beispiele sind die Einordnung von Kunden oder die Qualitätskontrolle, insbesondere von Oberflächen. Im Data Mining werden vorwärts gerichtete neuronal Netze für die Klassifikation eingesetzt.
- **Mustererkennungen**
  können teilweise auch als Klassifikationsproblem eingeordnet werden.
- **Prognose**
  mittels neuronaler Netze wird für Börsenwerte, für den Energie- oder Materialverbrauch oder auch für den Produktabsatz durchgeführt.
- **Steuerungen**
  in der Robotik, zur Fahrzeugsteuerung und Prozesssteuerung. Darüber hinaus werden neuronale Netze zur Steuerung von Bein-, Hand- oder anderen Prothesen entwickelt.

Ein Beispiel für eine Klassifikation wurde im Abschnitt über Musterzuordnungen 6.1.2 auf Seite 208 angeführt. Im Folgenden wird die Mustererkennung anhand von einfachen Beispielen demonstriert und kurz auf die Anwendung zur Prognose eingegangen.

6.3.1 Zeichenerkennung

Eines der klassischen Anwendungsbeispiele für vorwärtsgerichtete Netze ist die Zeichenerkennung. Mit dem Backpropagation-Algorithmus trainierte, mehrschichtige vorwärtsgerichtete

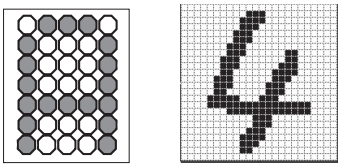


Bild 6.17 Zeichendarstellung als Pixelmatrix, links 5x7, rechts 24x24 Pixel

neuronale Netze können für die optische Erkennung und Klassifizierung von Schriftzeichen gut eingesetzt werden.

In der optischen Zeichenerkennung geht man von einem Rasterbild, einer Matrix von Bildpunkten, aus. Im Bild 6.17 sind zwei unterschiedliche Möglichkeiten aufgezeigt. Eine Auflösung von 5x7-Bildpunkten, die schwarz oder weiß sind, reicht aus, um alle Großbuchstaben des lateinischen Alphabets sowie die Ziffern darstellen zu können. Will man darüber hinaus auch Kleinbuchstaben und Sonderzeichen hinreichend unterscheiden, ist eine höhere Auflösung erforderlich. Die Menge der Beispiele des JavaNNS enthält sowohl einen Mustersatz mit 5x7-Bildern der Buchstaben als auch einen Satz aller druckbaren Zeichen im 24x24-Format.

Im Folgenden beschreiben wir einige Experimente, die das Verständnis für die Lernverfahren und die dabei auftretenden Probleme vertiefen. Es wird dazu wieder der JavaNNS benutzt. Es liegt in der Natur neuronaler Netze und auch des Systems JavaNNS, dass nicht alle Wiederholungen dieser Experimente dieselben Resultate zeigen. Es gibt keinen Grund zu verzagen, falls das selbst entwickelte Netz nicht sofort das hier beschriebene Verhalten aufweist. Möglicherweise lassen sich sogar bessere Resultate erzielen als die hier genannten.

Was bedeutet nun Erkennung im Rahmen der Zeichenerkennung? Was ist das Ergebnis, die Ausgabe eines neuronalen Netzes in diesem Anwendungsfall? Es lässt sich eine Klassifizierung vornehmen, wobei dann für jedes Zeichen ein Neuron für die Erkennung benötigt wird. In der Menge der Beispiel-Netze des JavaNNS ist das Netz letters.net enthalten, welches den hier beschriebenen Aufbau hat. Für die Experimente sollte stets von der untrainierten Variante letters_untrained.net ausgegangen werden.

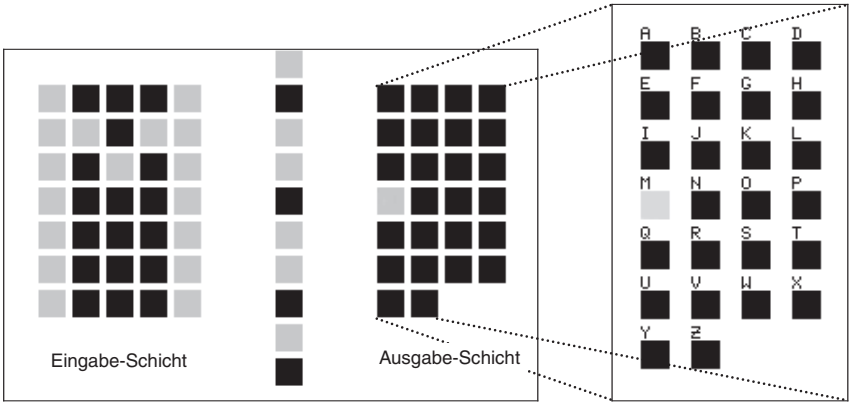


Bild 6.18 Das Netz letters.net des JavaNNS zur Erkennung von Großbuchstaben

Das Netz wird so trainiert, dass für ein Eingabemuster genau ein Ausgabe-Neuron aktiviert wird. Diese Aktivierung drückt die Zugehörigkeit des Musters zur entsprechenden Klasse

aus. Die Zahl der Ausgabe-Neuronen wird dann durch die Zahl der zu erkennenden Zeichen bestimmt. Im Bild 6.18 ist ein derartiges Netz angegeben. Es besteht aus drei Neuronen-Schichten und somit aus zwei Schichten von trainierbaren Verbindungsgewichten.

Aus Sicht der optischen Zeichenerkennung (OCR – Optical Character Recognition) ist die Umwandlung aus einem Bild in eine Zeichencodierung interessant. Ein Netz kann so aufgebaut werden, dass es den ASCII-Code eines Zeichens liefert. Eine Zeichensequenz wird dann direkt in eine Zeichenkette, Folge von ASCII-Zeichen, umgewandelt. Die Zahl der Ausgabe-Neuronen beträgt entsprechend der Codierung sieben oder acht Neuronen.

Das Bild 6.19 zeigt die Architektur dieses Netzes. Die Ausgabe-Schicht im Bild rechts oben zeigt für den Buchstaben B den binären ASCII-Code 100 0010 an, der dem dezimalen Wert 66 entspricht.

Beide Varianten werden hier vorgestellt und mit folgenden Lernalgorithmen und Parametern trainiert:

- **Standard-Backpropagation**
  1. Parameter λ, der Lernfaktor $\lambda = 0.2$ sowie $\lambda = 0.5$
- **QuickProp**
  1. Parameter λ, der Lernfaktor $\lambda = 0.2$ sowie $\lambda = 0.5$
  2. Parameter μ, maximales Wachstum der Gewichte $\mu = 2.0$
  3. Parameter ν, ein Maß zur Gewichtsbeschränkung $\nu = 0.0001$

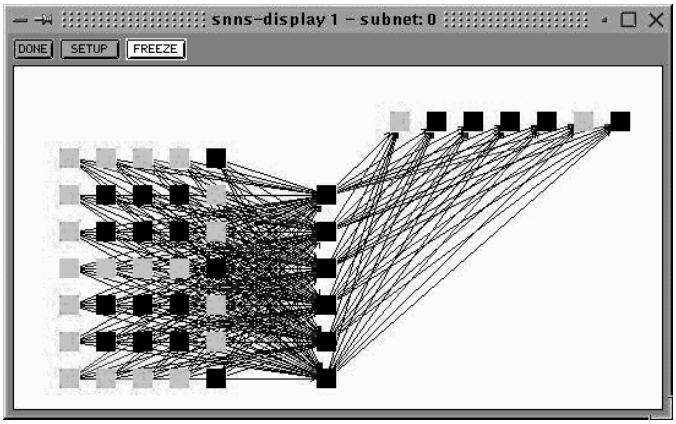


Bild 6.19 Ein zweischichtiges Netz zur Umwandlung eines Zeichens in den ASCII-Code

- **Resilient Propagation (RPROP)**
  1. Parameter $delta_{min} = 0.1$, der Startwert für Δ_{ij}
  2. Parameter $delta_{max} = 1.0$, die obere Grenze für Δ_{ij}
  3. Parameter α, der Gewichtszerfall $\alpha = 4$

Die Tabelle 6.3 zeigt die Ergebnisse. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass sowohl die Wahl des Lernverfahrens als auch die Wahl des Lernparameters entscheidend für die Qualität des Trainingsergebnisses ist. Zum Vergleich wird der **mittlere quadratische Fehler**, engl. **Mean Squared Error (MSE)** angegeben.

Tabelle 6.3 Musterklassifikation – Trainingsergebnisse verschiedener Lernverfahren

Lernverfahren	Lernfaktor	Lernzyklen	MSE	Bemerkung
Backpropagation	$\lambda = 0.2$	100 1000 2000	0.854 0.090 0.050	auch nach 2000 Schritten keine fehlerlose Erkennung: 'N' wird nicht erkannt
Backpropagation	$\lambda = 0.5$	100 300	0.610 0.088	alle Muster erkannt
QuickProp	$\lambda = 0.2$ $\lambda = 0.5$	50 50	0.45 0.04	alle Muster erkannt
RPROP		30 50	0.06 0.00	alle Muster erkannt

Das Backpropagation-Verfahren zeigt das schlechteste Verhalten. Hier entscheidet der Lernfaktor nicht nur über die Geschwindigkeit der Anpassung, sondern sogar über den Erfolg des Experiments. Im Falle des Lernfaktors von 0.2 werden selbst nach zweitausend Lernschritten nicht alle Muster wie gewünscht erkannt: Schwierigkeiten bereitet die Erkennung des Buchstaben N.

Das Netz wurde jeweils nicht nur einmal trainiert, sondern mehrmals. Das Bild 6.20 zeigt die Fehlerkurven für das Training mit dem Standard-Backpropagation-Algorithmus. Im Wesentlichen weisen die Fehlerkurven zwar die gleiche Tendenz auf, im Detail zeigen sie durchaus relevante Unterschiede im Lernverhalten.

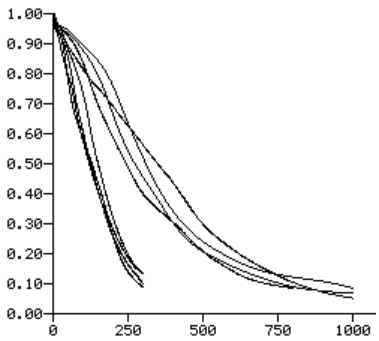


Bild 6.20 Fehlerkurven Backpropagation mit $\lambda = 0.2$ (obere) und $\lambda = 0.5$ (untere)

Deutlich erkennbar sind die Unterschiede zwischen dem Training mit dem Lernfaktor $\lambda = 0.2$ und dem Lernfaktor $\lambda = 0.5$. Wobei letzterer zu einem erheblich besseren Anpassungsverhalten führt. Die Kurvenverläufe für die Trainingsprozesse unter Verwendung des QuickProp-Algorithmus sind im Bild 6.21 zu sehen. Der Unterschied zwischen den beiden Lernfaktoren ist ebenso erkennbar. Interessanterweise führt hierbei der Lernfaktor $\lambda = 0.2$ zu einer deutlich schnelleren Anpassung.

Am schnellsten führte das RPROP-Verfahren zum Ziel. Einerseits werden alle Muster bereits nach 30 Lernzyklen erkannt, andererseits ist das Ergebnis nach 50 Lernzyklen mit einem $MSE = 0.0$ viel zu gut, um noch eine Generalisierungsfähigkeit erwarten zu können. Das

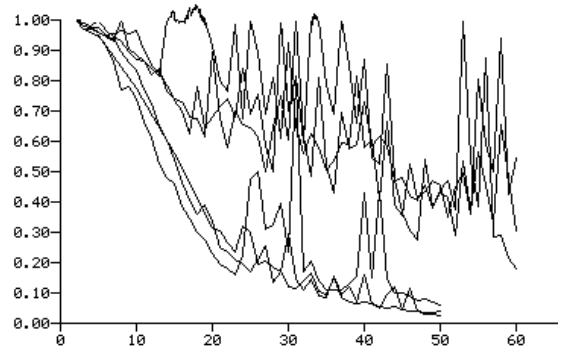


Bild 6.21 Fehlerkurven QuickProp mit $\lambda = 0.2$ (obere) und $\lambda = 0.5$ (untere)

RPROP-Verfahren reagierte in unseren Experimenten kaum auf Veränderungen der eingangs genannten Parameter der Lernfunktion.

Dieselben Experimente können nun ebenso mit dem Netz zur Erkennung von Buchstaben und der Ausgabe des entsprechenden ASCII-Codes (Bild 6.19) durchgeführt werden.

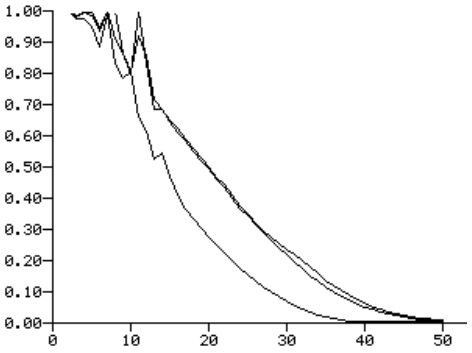


Bild 6.22 Fehlerkurven RPROP

Tabelle 6.4 zeigt die Resultate nach bestimmten Lernphasen an. Aus den zum Vergleich angegebenen Fehlerkurven können zudem Aussagen zum Verhalten eines Lernverfahrens gewonnen werden. Während Backpropagation eine vergleichsweise langsame Anpassung erzielt, erfolgt diese jedoch stetig.

Das QuickProp-Verfahren ist in seinem Verhalten dynamisch. Die Schwankungsbreite während eines konkreten Trainingsprozesses ist ziemlich groß. Vor allem bei diesem Verfahren sollte ein Netz mehrmals trainiert werden, um schließlich, in gewisser Weise „zufällig“, ein gutes Ergebnis erzielen zu können.

Bei dieser Anwendung kann das RPROP-Verfahren keine besseren Ergebnisse als das QuickProp-Verfahren aufweisen, jedoch ist das Trainingsverhalten wesentlich ruhiger (Bilder 6.23 und 6.24 auf Seite 228). Auch die Ergebnisse mehrerer Trainingsprozesse unterscheiden sich nicht wesentlich. Bemerkenswert ist, dass das Codieren von Zeichen durch das Back-

Tabelle 6.4 Mustercodierung – Trainingsergebnisse verschiedener Lernverfahren

Lernverfahren	Lernfaktor	Lernzyklen	MSE	Bemerkung
Backpropagation	$\lambda = 0.2$	100 200	0.472 0.006-0.15	noch deutliche Fehler mitunter alles erkannt
Backpropagation	$\lambda = 0.5$	100 200	0.167 0.01	mitunter alles erkannt alle Muster erkannt
QuickProp	$\lambda = 0.2$ $\lambda = 0.5$	50 100	0.33 0.03	nicht alle erkannt alle Muster erkannt
RPROP		50 50	0.11-0.2 0.04-0.08	Schwierigkeiten mit E/F und Q/S

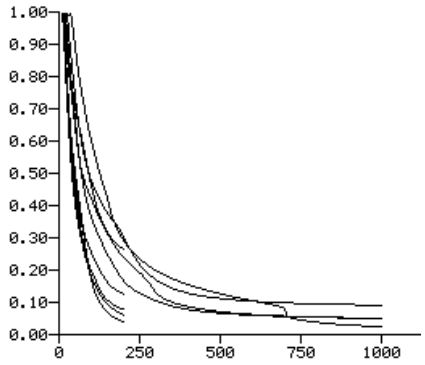


Bild 6.23 Fehlerkurven Backpropagation mit $\lambda = 0.2$ (bis 1000) und $\lambda = 0.5$ (bis 200)

propagation-Verfahren besser gelernt werden kann als das Klassifizieren. Jedoch funktionieren die beiden anderen Verfahren für das Klassifizieren wesentlich besser als für das Codierungsproblem. Es gibt also nicht das eine sehr gute Trainingsverfahren. Für jedes Problem sollten mehrere Verfahren getestet werden.

Bereits in der Einleitung wurde hervorgehoben, dass das Ziel einer Entwicklung eines neuronales Netzes nicht darin besteht, alle Trainingsmuster korrekt zu bearbeiten. Vielmehr kommt es darauf an, möglichst viele Muster korrekt zu klassifizieren bzw. zu codieren, die nicht Bestandteil der Trainingsmenge waren. Die oben diskutierten Experimente sind nun zu ergänzen, indem die **Generalisierungsfähigkeit** der trainierten Netze anhand einer Testmuster-Menge gemessen wird.

Dazu können, falls keine anderen realistischen Daten verfügbar sind, die Trainingsmuster „verrauscht“ werden: Zufällig werden einige Pixel der Matrix verändert. Ähnlich wie Hintergrundgeräusche den Musikgenuss oder das Hören gesprochener Worte mehr oder weniger stark beeinflussen, können Pixel-Störungen eine Art bildliches Rauschen darstellen. Verunreinigungen auf dem Papier führen bei der Bildaufnahme zu schwarzen Pixeln, die keine Bedeutung haben. Ein Fehler im Druck kann dazu führen, dass einige Pixel des Zeichens weiß bleiben.

Auf den WWW-Seiten zum Buch ist ein einfaches Java-Programm zum Verrauschen von Mustern angegeben.

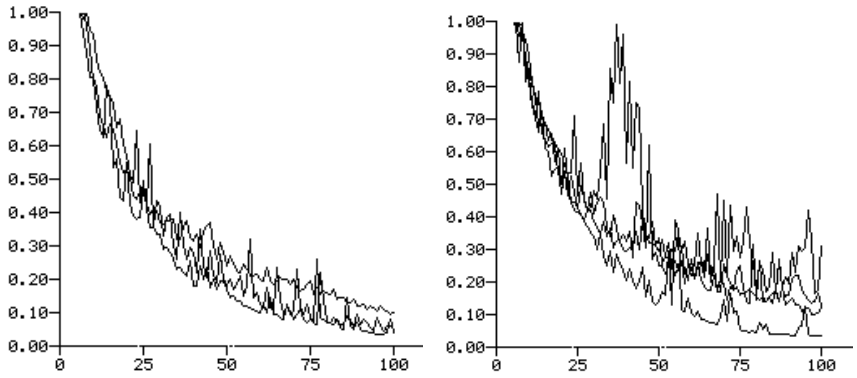


Bild 6.24 Fehlerkurven QuickProp mit $\lambda = 0.2$ (links) und $\lambda = 0.5$ (rechts)

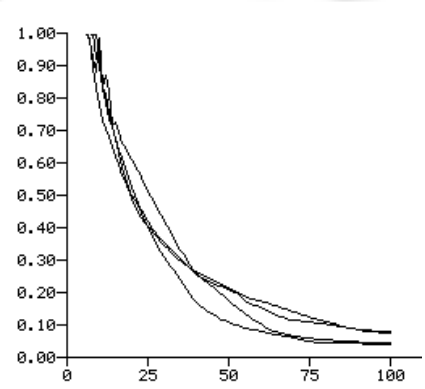


Bild 6.25 Fehlerkurven RPROP

Im Falle der Mustererkennung wird die Generalisierungsfähigkeit eines Netzes auf eine besonders harte Probe gestellt, falls ein Zeichen im Prinzip erkennbar ist, aber eine geänderte Position innerhalb der Pixelmatrix einnimmt. Translation oder Rotation bzw. Verzerrungen der Zeichen sind dann nicht mehr durch neuronale Netze allein zu bewältigen. Es wird eine Datenaufbereitung und Datenvorverarbeitung notwendig. Vorverarbeitungen und Transformationen wie die Hauptachsentransformation oder die Fourier-Transformation der Eingabedaten können dabei gute Dienste leisten.

6.3.2 Das Encoder-Decoder-Netz

Sowohl zur Merkmalsreduktion als auch zur Datenübertragung können neuronale Netze eingesetzt werden, die die Datenmenge einer Eingabe drastisch reduzieren. Betrachten wir zum Beispiel das 24x24 Eingabebild eines Zeichens. Wie viel Information ist wirklich nötig, um das gesamte Zeichenbild wieder rekonstruieren zu können? Selbstverständlich können wir in die-

sem Spezialfall eine Codierung angeben und einen Algorithmus, der jedes Zeichen aus seinem Code wieder erzeugt. Aber kann ein Programm diese Art von Codierung auch lernen? Die folgenden Experimente zeigen den Einsatz neuronaler Netze für diese Aufgabe.

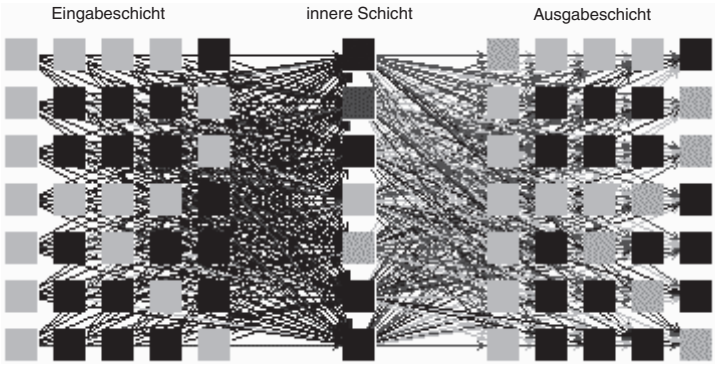


Bild 6.26 Encoder-Decoder für 5x7-Pixelfeld mit sieben inneren Neuronen

Um zu überprüfen, ob die reduzierte Anzahl von Werten noch die gesamte Information erhält, die in der Eingabe enthalten ist, versucht man einfach das Originalbild wieder herzustellen. Damit ist ein Encoder-Decoder-Simulationsnetz ein zweischichtiges vorwärtsgerichtetes Netz. Die innere Schicht stellt die Codierung oder auch die Merkmalsreduktion dar. Die zwei Schichten trainierbarer Gewichte sind für das Codieren bzw. Decodieren verantwortlich. Für die Entwicklung des Netzes gibt es zwei Ziele:

- Die **Datenreduktion** soll möglichst groß sein. Die Zahl der Neuronen in der inneren Schicht wird minimiert.
- Auch verrauschte Informationen sollen erkannt und in ein nicht verrauschtes Originalbild abgebildet werden. Dieses Ziel kollidiert mit dem vorherigen. Die Zahl der Neuronen in der inneren Schicht kann nicht so stark reduziert werden. Hier steht die Generalisierungsfähigkeit des Netzes im Vordergrund.

Ein Netz, das für die Merkmalsreduktion trainiert wurde, wird später als Vorstufe einer weiteren Verarbeitung eingesetzt. Beispielsweise kann sich die Klassifikation, vorgenommen durch ein weiteres neuronales Netz, an die Merkmalsreduktion anschließen.

6.3.3 Ein Prognose-Netz

Eine besonders spektakuläre, aber bei weitem nicht die einzige Anwendung neuronaler Netze für die Prognose stellt die Vorhersage von Börsenwerten dar. Ein Prognoseproblem weist stets eine Rückbezüglichkeit der Ausgabe auf. Das prognostizierte Ergebnis oder der tatsächlich eingetretene Wert muss im nächsten Schritt zum Bestandteil der Eingabe des folgenden Prognoseschrittes werden.

Man könnte meinen, dass rein vorwärtsgerichtete Netze deshalb für eine Prognoseaufgabe wenig geeignet sind. Jedoch erweist sich die einfache Handhabung als entscheidender Vorteil. Was ein vorwärtsgerichtetes Netz von sich aus nicht bietet, die Rückkopplung der Ausgabe, wird von Hand oder von einem entsprechenden Rahmenprogramm übernommen.

In der Literatur werden vielfältige Ansätze für die Prognose unterschiedlicher Finanzwerte vorgestellt.

Im Bild 6.27 ist ein dreischichtiges Netz für die kurzfristige Prognose von Aktienkursen dargestellt. Erkennbar sind 43 Eingabe-Neuronen, die die Werte von entsprechend aufbereiteten Kurs-Indikatoren an das Netz liefern. Im Ergebnis erhalten wir die Aktivierung eines einzigen Ausgabe-Neurons. Der Aktivierungsbereich reicht von -1 bis +1 und gibt die relative Veränderung wieder.

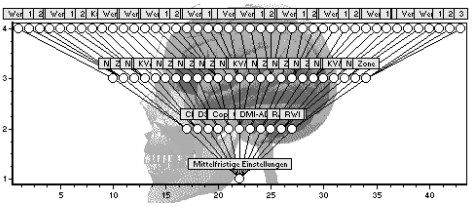


Bild 6.27 Netz zur kurzfristigen Vorhersage von Aktienwerten

Das Netz wird mit mehreren Tausend aufbereiteten Datensätzen aus historischen Kursdaten trainiert.

Als einführendes Beispiel dient die simple Prognose eines Kurvenverlaufes; die Bereitstellung notwendiger Daten für eine ernsthafte Prognose würde an dieser Stelle zu weit führen. Anhand der Vorhersage des nächsten Punktes einer Sinuskurve wird das Prinzip erläutert. Betrachtet man die aufeinanderfolgenden Werte der Sinusfunktion in einem festen Abstand, so kann man erkennen, dass ein einzelner Wert nicht ausreicht, den nachfolgenden Wert vorherzusagen.

Tabelle 6.5 Wertetabelle der Sinusfunktion

0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π	$\frac{9}{8}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	...
0.00	0.38	0.71	0.92	1.00	0.92	0.71	0.38	0.00	-0.38	-0.71	-0.92	...

Auf den Wert 0.00 kann sowohl der Wert +0.38 als auch der Wert -0.38 folgen. Eine Vorhersage erfolgt auch nicht aufgrund eines historischen Wertes allein. In diesem Fall reicht die Angabe von zwei „alten“ Werten, um den nächsten prognostizieren zu können.

Listing 6.3 JavaNNS-Pattern-Datei für die Prognose der Sinus-Funktion

```
SNNS pattern definition file V3.2
generated at Mon Apr 25 18:08:50 2000

No. of patterns : 16
No. of input units : 2
No. of output units : 1
# input pattern 1:
-0.382683432
0
# output pattern 1:
0.382683432
# input pattern 2:
0
0.382683432
# output pattern 2:
0.707106781
# input pattern 3:
0.382683432
0.707106781
# output pattern 3:
0.923879533
```

```
...
```

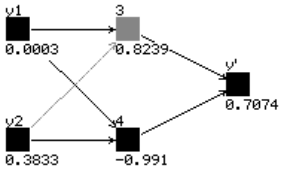


Bild 6.28 Ein einfaches Netz zur Prognose der Daten einer Sinuskurve (JavaNNS)

Das Training erfolgt mittels einer Datenmenge, bei der die Trainingsausgabe zum Zeitpunkt t Bestandteil der Eingabe zum Zeitpunkt $t+1$ sowie auch zum Zeitpunkt $t+2$ wird. Damit wird die nicht vorhandene Rückkopplung simuliert.

Das Netz passt sich sehr schnell an. Der Wert des Ausgabe-Neurons wird als y-Koordinate und die Nummer der Eingabe als x-Koordinate interpretiert. Es kann so leicht kontrolliert werden, ob das gewünschte Ergebnis, der Kurvenverlauf, erzeugt wird (Bild 6.29).

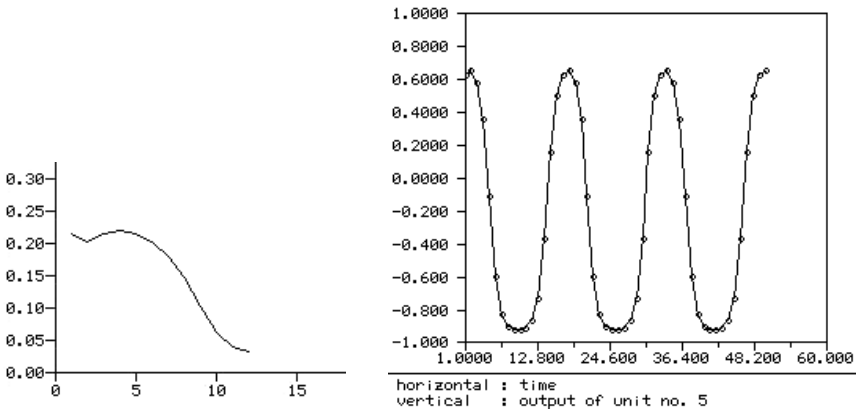


Bild 6.29 Mittlerer Fehler während des Trainings (JavaNNS-Graph) und Darstellung des Ergebnisses des trainierten Netzes

Da das Netz so schnell trainiert werden konnte, ist das Netz für diese Aufgabe vermutlich zu groß dimensioniert. Ein Perzeptron hätte genügt. Prognose-Probleme können mit rein vorwärtsgerichteten Netzen gelöst werden. Das Schwierigste dabei ist die Bereitstellung und Aufbereitung der notwendigen Eingabedaten. Die bei Prognoseproblemen notwendige Rückkopplung wird außerhalb des Netzes organisiert.

Übung 6.18 Zeichenerkennung

Wie funktioniert eine Zeichenerkennung mit Hilfe eines neuronalen Netzes?

Übung 6.19 Großbuchstaben

Nutzen Sie den JavaNNS und bauen Sie ein zweischichtiges vorwärtsgerichtetes Netz mit 35 Eingabe-Neuronen, 10 Zwischen-Neuronen und 26 Ausgabe-Neuronen auf. Das Netz soll Großbuchstaben, dargestellt als 5x7-Pixelfeld, klassifizieren.

Trainieren Sie dieses Netz mit dem Backpropagation-Verfahren unter Verwendung unterschiedlicher Lernfaktoren: $\lambda = 0.2$; $\lambda = 0.8$; $\lambda = 1.2$.

Übung 6.20 RPROP und Quickprop

Verwenden Sie die modifizierten Backpropagation-Verfahren Resilient Propagation (RPROP) und Quickprop. Vergleichen Sie den Fehler nach einer festen Zahl von Trainingszyklen,zum Beispiel nach 300 Zyklen. Wie viele Trainingszyklen werden benötigt, damit der Gesamtfehler kleiner als 0.1 ist?

Übung 6.21 Netz verkleinern

Minimieren Sie das Netz aus Aufgabe 6.19. Wie viele Neuronen sind in der inneren Schicht minimal erforderlich, damit alle 26 Buchstaben wieder rekonstruiert werden?

Wie groß muss die Schicht sein, damit auch verrauschte Muster (5% Rauschen) erfolgreich bearbeitet werden?

Übung 6.22 Implementierung

Implementieren Sie ein entsprechendes Netz in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

Übung 6.23 Roboter-Steuerung

Entwickeln Sie ein Netz, welches für einen Roboter das Fahren an der Wand entlang trainiert. Gehen Sie von einer zweidimensionalen Rasterwelt aus, wobei der Roboter ein Feld belegt. Die umgebenden Felder seien in der Reihenfolge von oben links im Uhrzeigersinn durchnumeriert. Ein Vektor enthält die Umgebungsinformation mit 0 leeres Feld und 1 Hindernis. Im folgenden Bild ist die Situation durch X = (0,0,1,1,0,0,0,0) charakterisiert.

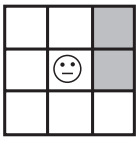


Bild 6.30 Ein Roboter in der Rasterwelt

Die Ausgabe des Netzes soll die Reaktion des Roboters anzeigen. Das geschieht durch vier Neuronen, die für die vier Richtungen Norden, Osten, Süden, Westen stehen. Die erwartete Ausgabe für das Bild 6.30 ist dann: netout = (0,0,1,0). Erarbeiten Sie einen geeigneten Satz von Trainingsdaten. Das Training mit allen 256 möglichen binären Vektoren ist nicht sinnvoll. Einige Situationen sind nicht möglich, da Hindernisse nicht an benachbarten Ecken aufeinander stoßen sollen. Eine Umgebung aus lauter Einsen sei ebenso ausgeschlossen.

Übung 6.24 Prognose

Führen Sie die Sinuskurven-Prognose mit Hilfe eines Perzeptrons durch.

Übung 6.25 Prognose

Vergleichen Sie das Verhalten des Perzeptrons (Aufgabe 6.24) mit dem des neuronalen Netzes für die Prognose aus Bild 6.28.

Übung 6.26 Bildvorverarbeitung und deren Wirkungsweise

Erläutern Sie Algorithmen der Bildvorverarbeitung und deren Einsatz.

Übung 6.27 Backpropagation-Netze in der Praxis

Führen Sie eine Literaturrecherche durch und tragen Sie Anwendungsfälle für vorwärts gerichtete neuronale Netze zusammen.

Übung 6.28 Prognose von Börsenwerten

Stellen Sie die Nutzung neuronaler Netze für die Voraussage unterschiedlicher Börsenwerte zusammen.

6.4 Datenvorverarbeitung

Will man ein Problem mittels eines künstlichen neuronalen Netzes lösen, so sind die zur Verfügung stehenden Daten so anzupassen, dass diese von einem Netz verarbeitet werden können. Die Erfahrung zeigt, dass die Aufbereitung der Daten ganz wesentlich die Qualität des Ergebnisses beeinflusst. Die Daten müssen vorverarbeitet werden. Die Aufbereitung der Daten umfasst mehrere Schritte, die im Abschnitt 6.4.1 vorgestellt werden. Daran schließt sich im Abschnitt 6.4.2 eine Diskussion verschiedener Codierungen anhand eines Beispiels an. Die Ausführungen des gesamten Abschnittes 6.4 können auf die Arbeit mit beliebigen neuronalen Netzen und darüber hinaus mit anderen Data-Mining-Verfahren verallgemeinert werden. Eine tiefergehende Diskussion der Datenaufbereitung kann in [CL16] nachgelesen werden.

6.4.1 Verarbeitungsschritte

Selektion und Integration

Es werden diejenigen Daten ausgewählt, die für Lösung der Aufgabe notwendig erscheinen: **Selektion**. Gegebenfalls sind diese aus unterschiedlichen Quellen zusammenzuführen: **Integration**. Als Teil einer Selektion kann auch der Prozess der Merkmalsreduktion angesehen werden: Ein Primärschlüssel wird ebenso entfernt, wie ein Merkmal, dessen Wert für alle Datensätze identisch ist. Inhaltlich irrelevante Daten können ebenso weggelassen werden.

Vervollständigung und Säuberung

Nicht immer liegen alle Daten vollständig vor. Der Umgang mit fehlenden Werten ist kritisch. Falls möglich, ignoriert man ein entsprechendes Merkmal oder die betroffenen Datensätze generell. Häufig jedoch müssen die fehlenden Werte ergänzt werden. Eine manuelle Vervollständigung aller Datensätze ist aufgrund der meist vorhandenen Massendaten selten geeignet. Für eine automatische Vervollständigung kommen mehrere Ansätze in Frage:

- Eine globale Konstante „fehlender Wert“ wird anstelle der fehlenden Werte eingesetzt. Damit wird der Wertebereich des Merkmals erweitert. Es entsteht möglicherweise ein neuer ungewollter Zusammenhang zwischen allen Datensätzen, die diesen fehlenden Wert aufweisen.
- Der Durchschnittswert wird verwendet.
- Der wahrscheinlichste Wert wird anstelle fehlender Werte eingesetzt.
- Es wird der ähnlichste Datensatz ermittelt und die Werte entsprechend ergänzt. Neben der Vervollständigung kann auch eine Säuberung der verfügbaren Daten von inkonsistenten Daten erforderlich sein.

Transformation

Alle Daten sind in einen oder mehrere Werte aus dem Wertebereich der Aktivierungsfunktion abzubilden. Ordinale Werte können in reellwertige Daten überführt, reellwertige Daten durch Normierung auf einen Wertebereich wie (0,1) oder (-1,+1) abgebildet werden. Durch eine vorherige Intervallbildung können reelle Werte auch wie ordinale oder auch nominale Werte behandelt werden.

Nominale Werte werden durch eine Menge von 0-1-Werten codiert (Binärcodierung). Dabei sind so viele Neuronen notwendig, wie es verschiedene Werte für das Merkmal gibt. Der Nachteil dieser Codierung besteht darin, dass eine Netzeingabe, bestehend aus mehreren nominalen Merkmalen, dann aus einer hohen Anzahl von Nullen und nur wenigen Einsen besteht. Alternativ kann eine Codierung auf der Basis der Binomialkoeffizienten benutzt werden. Man wählt zwei natürliche Zahlen k und n so, dass der Binomialkoeffzient größer als die Anzahl der Werte des Merkmals ist. Dann werden für jeden Merkmalswert k Zahlen aus diesen n Zahlen ausgewählt. Die Neuronen mit einer gewählten Zahl werden mit 1 belegt, alle anderen mit einer Null. Das ergibt eine weitgehend gleiche Anzahl von Einsen und Nullen für jeden Merkmalswert. Ein neuer Merkmalswert führt bei dieser Codierung nicht automatisch zu einem weiteren Neuron.

Beispiel 6.3 Codierung des nominalen Merkmals Farbe

Für das Merkmal Farbe seien in einer Menge von Daten die Werte weiß, gelb, rot, grün, blau, schwarz.

Farbe = {weiß, gelb, rot, grün, blau, schwarz}

Eine Codierung erfolgt nun durch sechs 0-1-Werte, wobei die Wertesequenz nur genau eine 1 und somit 5 Nullen aufweist:

gelb = (0,1,0,0,0,0),

rot = (0,0,1,0,0,0) usw.

Greift man auf einen Binomialkoeffizienten zurück, so bilden $k = 2$ und $n = 4$ ein geeignetes Wertepaar.

$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = 6$

Es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten 2 Zahlen aus 4 Zahlen auszuwählen. Statt vorher 6 sind nun nur 4 Neuronen für die Darstellung des Merkmals notwendig:

- weiß = (1,1,0,0),
- gelb = (1,0,1,0),
- rot = (1,0,0,1),
- grün = (0,1,1,0),
- blau = (0,1,0,1),
- schwarz = (0,0,1,1)

Bei ordinalen Werten kann zum einen analog zur Codierung von nominalen Werten vorgegangen werden. Darüber hinaus ist eine Codierung sinnvoll, bei der die Anzahl der Einsen die Ordnung des ordinalen Merkmals widerspiegelt. Dazu sind für die Abbildung von n verschiedenen Werten $n-1$ Neuronen notwendig. Das Minimum wird mit einer Sequenz von Nullen codiert, jedes weitere Element enthält gemäß Ordnungsreihenfolge genau eine Null mehr. Das Maximum wird dann durch eine Sequenz aus Einsen dargestellt.

Beispiel 6.4 Codierung des ordinalen Merkmals Einkommen

Ein Merkmal Einkommen liegt bereits klassifiziert vor. Es gibt ein niedriges, mittleres oder hohes Einkommen. Analog zum Beispiel Farbe kann dieses Merkmal nun durch 3 Werte, von denen nur jeweils einer eine Eins darstellt, realisiert werden:

- niedrig = (1,0,0),
- mittel = (0,1,0),
- hoch = (0,0,1)

Um die Ordnung auch in der Codierung auszudrücken, ist auch folgende Vorgehensweise denkbar:

- niedrig = (1,0,0),
- mittel = (1,1,0),
- hoch = (1,1,1)

Da hierbei der erste Wert stets 1 ist, verzichten wir auf diesen und erhalten als Codierung:

- niedrig = (0,0),
- mittel = (1,0),
- hoch = (1,1)

Neben der Codierung sind auch Transformationen sinnvoll. So kann zum Beispiel durch den Einsatz einer Fourier-Transformation die Analyse zeitabhängiger Daten verbessert werden.

6.4.2 Daten des Kreditvergabe-Beispiels

In der KI-Literatur wird immer wieder die Einschätzung der Kreditwürdigkeit von Bankkunden als Beispiel herangezogen. Einige Probleme bei der Bereitstellung geeigneter Eingabedaten werden im Folgenden anhand dieses Beispiels diskutiert.

Aus [LM98] stammen die konkreten Datensätze. Die Aufgabenlösung kann mit dem JavaNNS durchgeführt werden. Ein Datensatz charakterisiert einen Kunden mittels der Merkmale: Kreditvergangenheit, Höhe der Schulden, vorhandene Sicherheiten sowie Höhe des Einkommens. Nicht alle Merkmale können wertmäßig angegeben werden. Auch werden wertmäßige Angaben mitunter nur in Kategorien erfasst, wie beispielsweise das Einkommen:

- Niedriges Einkommen unter 1.500 Euro
- Mittleres Einkommen zwischen 1.500 Euro und 3.000 Euro
- Hohes Einkommen über 3.000 Euro

Die genannten Merkmale lassen sich durch die folgenden Wertemengen repräsentieren:

- Kreditvergangenheit = { schlecht, unbekannt, gut }
- Schuldenhöhe = { hoch, gering }
- Sicherheiten = { nicht vorhanden, angemessen }
- Einkommen = { niedrig, mittel, hoch }

Ein neuronales Netz wird anhand von Beispieldaten trainiert, einen entsprechend charakterisierten Kunden zu bewerten und als schlechten, durchschnittlichen oder guten Kunden einzustufen. Im Ergebnis wird eine Einteilung in drei Gruppen erwartet:

- schlechter Kunde
- durchschnittlicher Kunde
- guter Kunde

Die Tabelle 6.6 zeigt Datensätze, Eingabewerte sowie gewünschte Ausgabewerte.

Man darf im Folgenden nicht aus dem Auge verlieren, dass das Lernen der Beispieldaten nicht im Vordergrund steht. Für diese ist schließlich ein Ergebnis bekannt. Vielmehr gilt es, die Generalisierungsfähigkeit des Netzes auszubilden. Das Netz muss aufgrund des antrainierten Verhaltens neue, bis dahin unbekannte Eingaben richtig klassifizieren können.

Um die Aufgabe mittels eines Netzes zu lösen, ist eine Codierung der gegebenen Werte notwendig. Häufig werden derartige nominale Werte durch natürliche Zahlen codiert:

- Kreditvergangenheit = { 0, 1, 2 } entspricht { schlecht, unbekannt, gut }
- Schuldenhöhe = { 0, 1 } entspricht { hoch, niedrig }
- Sicherheiten = { 0, 1 } entspricht { keine, vorhanden }
- Einkommen = { 0, 1, 2 } entspricht { niedrig, mittleres, hohes }
- Kunde = { 0, 1, 2 } entspricht { schlecht, normal, gut }

Für die Aufgabenlösung wird nun ein vorwärtsgerichtetes Netz mit vier Eingabe-Neuronen, zwei inneren Neuronen und einem Ausgabe-Neuron benutzt (Bild 6.31).

Nach 300 Trainingszyklen wurden die in der Tabelle 6.7 dargestellten Ergebnisse ermittelt.

Tabelle 6.6 Datensätze für das Training des Netzes

Nr.	Kreditgeschichte	Schulden	Sicherheit	Einkommen	Kunde
1	schlecht	hoch	keine	niedrig	schlecht
2	unbekannt	hoch	keine	mittleres	schlecht
3	unbekannt	niedrig	keine	mittleres	normal
4	unbekannt	niedrig	keine	niedriges	schlecht
5	unbekannt	niedrig	keine	hohes	gut
6	unbekannt	niedrig	vorhanden	hohes	gut
7	schlecht	niedrig	keine	niedriges	schlecht
8	schlecht	niedrig	vorhanden	hohes	normal
9	gut	niedrig	keine	hohes	gut
10	gut	hoch	vorhanden	hohes	gut
11	gut	hoch	keine	niedriges	schlecht
12	gut	hoch	keine	mittleres	normal
13	gut	hoch	keine	hohes	gut
14	schlecht	hoch	keine	mittleres	schlecht

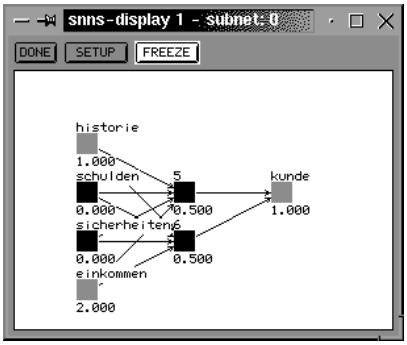


Bild 6.31 Vorwärtsgerichtetes Netz für die Bewertung der Kreditwürdigkeit

Aus der Tabelle 6.7 wird ein Problem deutlich: Da die Aktivierung eines Neurons bei der Verwendung der logistischen Funktion nur zwischen 0 und 1 liegen kann, ist die gewünschte Klassifizierung 0, 1, 2 nicht möglich. Erkennbar wird, dass durchschnittliche Kunden ebenso wie gute Kunden einen Wert zwischen 0.92 und 0.99 erhalten.

Die Daten, zumindest die der Trainingsausgabe, sind auf den Bereich 0...1 abzubilden. Im nächsten Versuch wird mit folgender Codierung gearbeitet:

- Kreditvergangenheit = { schlecht 0, unbekannt 0.5, gut 1 }
- Schuldenhöhe = { hoch 0, niedrig 1 }
- Sicherheiten = { nicht vorhanden 0, angemessen 1 }
- Einkommen = { gering 0, mittel 0.5, hoch 1 }
- Kunde = { schlecht 0, normal 0.5, gut 1 }

In Tabelle 6.8 sind die Ergebnisse dargestellt.

Tabelle 6.7 Klassifikation der Bankkunden-Daten

Datensatz	Gewünschtes	Ergebnis	Ausgabe
1	schlecht	0	0.019
2	schlecht	0	0.127
3	normal	1	0.952
4	schlecht	0	0.144
5	gut	2	0.996
6	gut	2	0.997
7	schlecht	0	0.037
8	normal	1	0.993
9	gut	2	0.996
10	gut	2	0.996
11	schlecht	0	0.095
12	normal	1	0.925
13	gut	2	0.995
14	schlecht	0	0.032

Tabelle 6.8 Klassifikation der Bankkunden-Daten

Datensatz	Gewünschtes	Ergebnis	Ausgabe NN	Fehler
1	schlecht	0.0	0.08	0.0064
2	schlecht	0.0	0.15	0.0225
3	normal	0.5	0.48	0.0004
4	schlecht	0.0	0.07	0.0049
5	gut	1.0	0.88	0.0144
6	gut	1.0	0.89	0.0121
7	schlecht	0.0	0.03	0.0009
8	**normal**	**0.5**	**0.79**	**0.0841**
9	gut	1.0	0.93	0.0049
10	gut	1.0	0.83	0.0289
11	schlecht	0.0	0.09	0.0081
12	normal	0.5	0.51	0.0001
13	gut	1.0	0.89	0.0121
14	schlecht	0.0	0.05	0.0025

Nach dem Training ist eine auffallende Abweichung beim Datensatz 8 zu erkennen. Mehrere Versuche zeigen, dass es diesem Netz schwerfällt, den Datensatz 8 richtig zu lernen. Die Ausgabe tendiert stets in Richtung eines guten Kunden.

Das kann ein Anhaltspunkt dafür sein, dass die Trainingsdaten möglicherweise überarbeitet werden müssen. In unserem Beispiel lautet die entsprechende Frage: Ist ein Kunde mit zwar schlechter Kreditvergangenheit aber niedrigen Schulden, vorhandenen Sicherheiten und einem hohen Einkommen wirklich nur ein durchschnittlicher Kunde?

Besteht man auf der ursprünglichen Einschätzung, so kann diese Menge von Lerndatensätzen nicht gelernt werden. Helfen kann dann eine andere Codierung. Die Abbildung von verbal formulierten Eigenschaften auf eine binäre Codierung bringt bessere Ergebnisse, da eine klarere Trennung der Daten sichtbar wird.

Für jedes Merkmal werden so viele binäre Eingabe-Neuronen benutzt, wie dieses Merkmal unterschiedliche Werte annehmen kann. Jeder Wert des Merkmals führt zu genau einem aktivierten Neuron, siehe Bild 6.32.

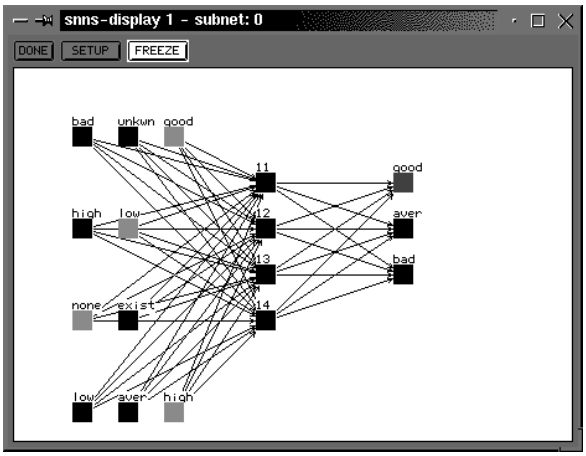


Bild 6.32 10-4-3-Netz für die Bewertung der Kreditwürdigkeit

Das entsprechende Netz besteht aus 3 + 2 + 2 + 3 = 10 Eingabe-Neuronen und drei Ausgabe-Neuronen. Nachteilig bei einer derartigen Codierung ist, dass nicht nur ein neues Merkmal, sondern bereits ein neuer Merkmalswert eine Änderung der Netz-Architektur erforderlich macht. Vorteilhaft ist, dass jeder Merkmalswert gleich deutlich abgebildet werden kann.

Tabelle 6.9 Binäre Codierung der Kundenmerkmale

Merkmal	Codierung
Kreditvergangenheit	schlecht (1,0,0), unbekannt (0,1,0), gut (0,0,1)
Schuldenhöhe	hoch (1,0), niedrig (0,1)
Sicherheiten	keine (1,0), angemessene (0,1)
Einkommen	niedriges (1,0,0), mittleres (0,1,0), hohes (0,0,1)
Kunde	gut (1,0,0), normal (0,1,0), schlecht (0,0,1)

Im Test wird mit einer inneren Schicht aus vier Neuronen gearbeitet. In hundert Lernzyklen kann mit einem Lernfaktor von 0.8 die Menge der Trainingsdatensätze gelernt werden, wie Bild 6.33 auf der nächsten Seite zeigt.

Im Bild 6.33 wird das Ergebnis durch den Grauwert des Feldes dargestellt. Ein dunkles Feld entspricht einer Erregung nahe 1.0, ein helles Feld steht für einen Ausgabewert nahe 0.0. Es ist erkennbar, dass alle Datensätze korrekt gelernt wurden. Auch der als problematisch eingestufte achte Datensatz wird bei dieser Art der Codierung problemlos gelernt. Interessant ist nun die Reaktion des Netzes auf bisher nicht eingesetzte Daten. Wie wird beispielsweise ein Kunde

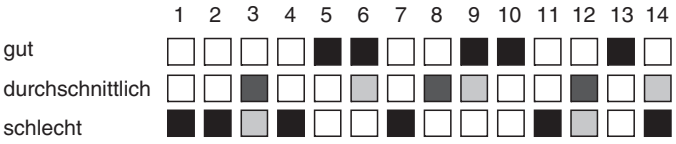


Bild 6.33 Ergebnis nach 100 Trainingszyklen

mit unbekannter Kreditvergangenheit, hohen Schulden, vorhandenen Sicherheiten und niedrigem Einkommen bewertet?

Erwartungsgemäß wird dieser Fall als schlechter Kunde eingestuft.

Übung 6.29 Codierung nominaler Werte

Warum ist eine Codierung nominaler Werte mittels natürlicher Zahlen ungeeignet?

Übung 6.30 Codierungen

Welche Codierung schlagen Sie für folgende Merkmale vor: Lebensalter, Körpergröße, Postleitzahl, Nationalität, Schulnoten, Prüfungsbewertungen gemäß der Skala 1,0; 1,3; 1,7; 2,0; 2,3; 2,7; 3,0; 3,3; 3,7; 4,0; 5,0?

Übung 6.31 Datenvorverarbeitung

Geben Sie einen Überblick über die Vorverarbeitung von Daten, damit diese mittels neuronaler Netze verarbeitet werden können.

6.5 Netzgröße und Optimierungen

Kernaufgabe eines neuronalen Netzes ist eine gewünschte Reaktion auf vorher nicht gelernte Muster. Diese Fähigkeit, die **Generalisierungsfähigkeit**, gilt es zu maximieren, konkret, der Generalisierungsfehler ist zu minimieren.

Um einen **Generalisierungsfehler** ermitteln zu können, ist die vorhandene Datenmenge in eine Trainingsmenge und eine Testmenge aufzuteilen. Der Fehler des Netzes bei der Bearbeitung der Muster der Testmenge wird als Generalisierungsfehler bezeichnet.

Eine für Test- und Lernzwecke ausreichende Testmenge erhält man leicht, indem die Muster der Trainingsmenge verrauscht werden. Vom **Verrauschen** spricht man, wenn eine bestimmte Zahl zufällig gewählter Eingabewerte geändert werden, wie dies für binäre Zeichenmuster im Abschnitt 6.3.1 angesprochen wurde.

Der Generalisierungsfehler eines Netzes wird beeinflusst durch

- die **Netzgröße**, insbesondere durch die Zahl der Neuronen in den inneren Schichten in Abhängigkeit von der Zahl der zu lernenden unterschiedlichen Kategorien,
- die Anzahl und Art der Verbindungen und deren Gewichte,

- das **Training** des Netzes. Hier beeinflussen das **Lernverfahren**, die **Lernparameter** und die Zahl der Lernschritte das Ergebnis.

Es wäre von großem Vorteil, ein Verfahren anwenden zu können, mit dem diese mehr oder weniger frei wählbaren Größen optimal eingestellt werden könnten. Informationen aus der Literatur, dass ein neuronales Netz einer bestimmten Bauart unter Nutzung des einen oder anderen Lernverfahrens hervorragende Ergebnisse zeigte, sind sehr interessant, nützen meist für das eigene Problem jedoch wenig. Eine andere, leicht abgewandelte Problemstellung erfordert häufig ein neues Herangehen und insbesondere eine Neubestimmung der Netzgröße sowie der Parameter.

Stellt sich das Problem der Optimierung eines Netzes prinzipiell für jede Netzarchitektur, so werden hier einige Vorgehensweisen anhand der vorwärtsgerichteten Netze diskutiert.

6.5.1 Die Größe der inneren Schicht

In den folgenden Ausführungen wird über neuronale Netze sehr stark personifiziert gesprochen. Dies dient lediglich der Anschauung. Man sei sich stets bewusst, dass hier mathematisch begründete Adaptionen von Kantengewichten vonstattengehen, die eine gewisse Funktionalität eines Netzes erzeugen. Ein neuronales Netz ist kein handelndes Individuum.

Neuronale Netze können Muster speichern, die antrainiert wurden. Mathematisch lässt sich diese **Speicherkapazität** leider nicht berechnen. Sie hängt wesentlich von der Anzahl der Verbindungen zwischen den Neuronen ab. Da die Zahl der Eingabe-Neuronen sowie die Zahl der Ausgabe-Neuronen durch die zu lösende Aufgabe mehr oder weniger fest vorgegeben sind, gilt es, die Größe der inneren Schicht(en) zu bestimmen.

„Viel hilft viel!“ mag anderenorts zu gewünschten Ergebnissen führen, für die Entwicklung eines vorwärtsgerichteten Netzes taugt dieses Motto nicht. Ist die innere Schicht zu groß gewählt, kann sich das Netz jedes einzelne Trainingsmuster mit zugehörigem Ausgabewert merken. Die Speicherkapazität des Netzes ist zu groß. Die Trainingsmenge wird auswendig gelernt. Auswendig gelerntes Faktenwissen lässt sich jedoch schlecht oder gar nicht auf neue Problemsituationen anwenden.

Ein entsprechend trainiertes neuronales Netz liefert den Beweis dafür. Ein derartiges Netz kann das antrainierte Verhalten nur auf die bekannten Trainingsmuster anwenden. Damit ist ein solches Netz kaum generalisierungsfähig. Man spricht dann vom **Overfitting**.

Erst wenn die Zwischenschicht so klein gehalten wird, dass eine Reproduktion des Verhaltens für die Trainingsmuster nicht mehr möglich ist, kann man hoffen, dass die **Generalisierungsfähigkeit** einsetzt. Diese ist unmittelbarer Ausdruck dafür, dass das Netz beginnt, Regeln zu erarbeiten und anzuwenden. Das Netz beginnt zu abstrahieren.

„Je weniger, desto besser!“ ist somit der klügere Ansatz, der aber nicht auf die Spitze getrieben werden darf. Auch das Speichern von Regeln benötigt einige Neuronen.

Grobe Regel: Ist der Fehler gleich null, werden alle Muster gemerkt; wird der Fehler groß, ist das Netz überfordert und kann die Vielzahl der Muster nicht mehr unterscheiden.

Die Größe der Zwischenschicht kann näherungsweise bestimmt werden. Dazu werden Musterdatenmengen benutzt, die für Eingabe- und Ausgabemuster nur zufälliges Rauschen ent-

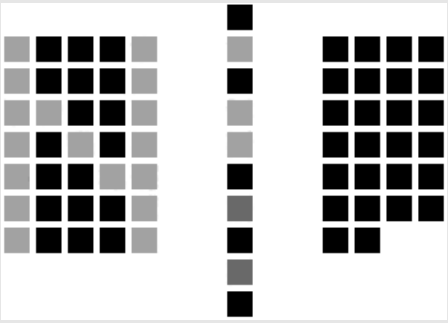
halten. Nun wird das Netz mehrfach mit diesen zufälligen Mustern trainiert, wobei mit jedem neuen Training die Zahl der Muster erhöht wird.

Dies wird durchgeführt, bis der Trainingsfehler nicht mehr null ist. An diesem Punkt ist die Grenze der Speicherkapazität des Netzes erreicht und es muss zu abstrahieren beginnen. Da in den zufälligen Mustern keine Zusammenhänge erkennbar sind, steigt der Trainingsfehler stark an.

Beispiel 6.5 Speicherkapazität eines neuronalen Netzes

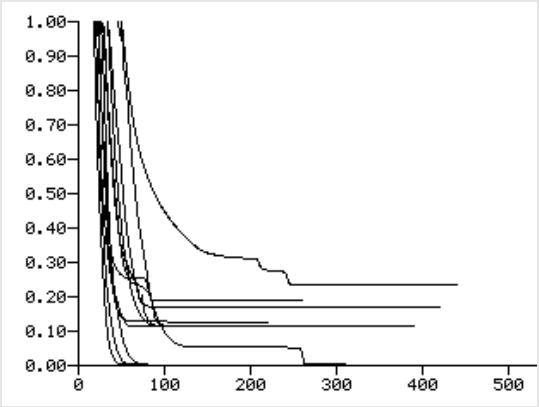
Als Beispiel-Netz wird das Netz letters.net aus der Menge der Beispiele des JavaNNS herausgegriffen. Dieses Netz kann Großbuchstaben erkennen, die als binäre 5x7 große Eingaben präsentiert werden. Das Netz besteht aus 35 Eingabe-Neuronen, 10 Neuronen in einer inneren Schicht und 26 Ausgabe-Neuronen für die Buchstabenklassifikation.

Hier ist das Netz letters.net zur Erkennung von Buchstaben:



Nun werden Trainingsmengen mit zufälligen Belegungen für die Eingabe- und Ausgabe-Neuronen erzeugt. Diese Mengen enthalten unterschiedlich viele Muster. Mit diesen Mengen wird das Netz immer wieder neu trainiert, der Trainingsfehler wird beobachtet. Das letters.net Netz wurde mit dem resilient Backpropagation-Algorithmus trainiert, da dieser Algorithmus zu einer sehr schnellen Anpassung des Netzes führt.

Im folgenden Bild sind die Kurvenverläufe des Trainingsfehlers für die Mustermengen, bestehend aus 15, 16, 18, 20 sowie 22, 24 und 26 Mustern, zu sehen.



Dieses Netz kann bis zu 20 Muster speichern. Man erkennt das aus der Fehlerkurve für zwanzig zufällige Muster, die bei ca. 260 Trainingszyklen den Fehlerwert 0.0 erreicht.

Mehr als 20 Muster kann das Netz nicht mehr fehlerfrei speichern. Werden keine zufälligen Muster verwendet, sondern Muster, die gewissen Regeln genügen, kann man erwarten, dass das Netz sich diese Regeln erarbeitet. Es setzt eine Abstraktion ein. Da in den zufälligen Mustern keine Regeln erkennbar sind, steigt der Trainingsfehler an. Erst für eine Menge mit mehr als 20 Mustern ist somit eine Generalisierungsfähigkeit des Netzes zu erwarten.

Aus der beschriebenen Vorgehensweise kann die Speicherkapazität einer Netzarchitektur bestimmt und die Größe der inneren Schicht abgeschätzt werden.

Definition 6.2 Speicherkapazität

Die Speicherkapazität eines Netzes wird durch die Anzahl der Muster bestimmt, für die eine fehlerlose Zuordnung der zufälligen Eingabe-Muster zu den zufällig gesetzten Ausgabe-Mustern fehlerfrei möglich ist.

Die Speicherkapazität eines Netzes ist deutlich niedriger als die Anzahl unterschiedlich zu klassifizierender Muster gewählt werden, um eine Generalisierungsfähigkeit erreichen zu können.

6.5.2 Das Entfernen von Verbindungen

Für die Optimierung neuronaler Netze können sowohl statistische Verfahren als auch genetische Verfahren zur Anwendung gebracht werden. In diesem Abschnitt werden weniger aufwendige statistische Verfahren beschrieben. Bei statistischen Verfahren werden plausible

Überlegungen durch einfache statistische Vorgehensweisen realisiert. Mögliche Ansätze für Optimierungen finden sich durch folgende Überlegungen.

- Gewichte, die über längere Zeit während des Trainings stets nahe dem Wert null liegen, tragen offensichtlich wenig zum Ergebnis bei, weder zur Ausgabe noch zum Netzfehler. Diese Gewichte, beziehungsweise die entsprechenden Verbindungen, können entfernt werden.
- In den Eingabemustern gibt es immer Regionen mit unterschiedlich starkem Bezug zum Erkennungsprozess. Man kann jeder Region der Eingabe eine eigene kleine innere Schicht zuordnen. Bei diesem Ansatz spricht man von rezeptiven Feldern.

Bei Experimenten [Low97] zur Optimierung von Netzen für die Zeichenerkennung zeigte sich, dass das einfache Herauslösen von Verbindungen zu einem Ausdünnen der Netztopologie und damit zu einem Verlust an Speicherkapazität führt. Bessere Resultate werden mit einer Umverteilung von Verbindungen erzielt.

Man beginne mit einem Netz, das nicht mehr vollständig ebenenweise vernetzt ist. Damit wird die Speicherkapazität des Netzes von vornherein etwas eingeschränkt, die Tendenz zur Regelausbildung dagegen verstärkt.

Im Verlauf der Optimierung werden Verbindungen entfernt, deren Gewichte längere Zeit einen Wert nahe null angenommen haben. Für jede gelöschte Verbindung wird jedoch in derselben Ebene eine neue Verbindung zufällig eingebaut. Nimmt man beispielsweise einen Grad der Vernetzung von 75% an, so gibt es für diese neuen Verbindungen stets Wahlmöglichkeiten.

Wird dieses Verfahren auf ein Netz mit rezeptiven Feldern angewendet, so kann diese Art der Optimierung die Gestalt der rezeptiven Felder verändern und an die tatsächlich relevanten Gebiete anpassen. Unter Umständen haben einige Eingabe-Neuronen danach keine Verbindungen mehr zum Netz. Diese Eingaben sind demzufolge für die Ermittlung des Ergebnisses überflüssig und können entfernt werden.

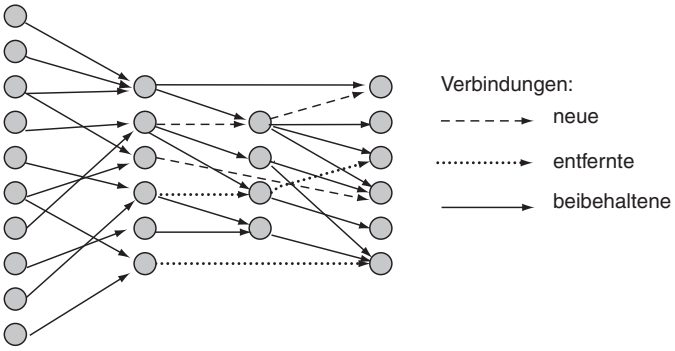


Bild 6.34 Umverteilung von Neuronen-Verbindungen

6.5.3 Genetische Algorithmen

Mit den neuronalen Netzen verbinden die genetischen Algorithmen erst einmal nur das gemeinsame Vorbild, beide Methoden sind der lebenden Natur entliehen. Genetische Algorithmen können prinzipiell für beliebige Optimierungsaufgaben eingesetzt werden. Gerade der

sehr schwierige Prozess der Wahl günstiger Netzparameter kann durch genetische Algorithmen unterstützt werden.

Das Prinzip **genetischer Algorithmen** ist einfach, die Umsetzung gestaltet sich dagegen schwieriger. Genau wie sich die lebende Natur über viele Generationen hinweg schrittweise an die jeweiligen Verhältnisse angepasst hat, wird in einem Simulationsprozess über viele Generationen von Software-Individuen die Anpassung an ein gewünschtes Ziel erreicht.

Der Algorithmus führt dabei die folgenden Schritte durch. Auszugehen ist von einer geeigneten Codierung des zu optimierenden Sachverhaltes, zumindest der die Situation charakterisierenden Werte. Meist werden dabei die zu optimierenden Größen in einen einzigen Bitstring umgewandelt.

Nun kann eine erste Generation von Individuen, zum Beispiel verschiedene Lernparameter, erzeugt werden. Konkret wird eine Menge aus zufällig erzeugten Bitstrings aufgebaut. Jeder Bitstring kann interpretiert werden und steht für eine bestimmte Lösung des ursprünglichen Problems. Die Güte dieser Lösung wird durch eine Funktion, die so genannte **Fitness-Funktion**, bestimmt. Für ein neuronales Netz kann die Güte durch den Netzfehler bei der Bearbeitung der Testmuster- oder Validierungsmuster-Menge ausgedrückt werden.

Listing 6.4 Algorithmus einer genetischen Optimierung

```
PROCEDURE GenetischeOptimierung
  t := 0;
  Bilde Generation(t) aus n zufälligen Mustern;
  Wähle nSel und nKreuz;
  REPEAT
    Generation(t+1) := {};
    FOR i:=1 TO nSel DO // Selektion
      P := Wähle zufällig k Muster aus Generation(t) aus;
      Bestimme Gewinner g aus P mittels Fitness-Funktion f;
      Generation(t+1) := Generation(t+1) ∪ {g};
    END FOR
    FOR i:=1 TO nKreuz DO // Kreuzung
      P := Wähle zufällig k Muster aus Generation(t) aus;
      Bestimme Gewinner v aus P mittels f;
      P := Wähle zufällig k Muster aus Generation(t) aus;
      Bestimme Gewinner m aus P mittels f;
      {a,b} := Kreuzung von v und m;
      Generation(t+1) := Generation(t+1) ∪ {a,b};
    END FOR i
    FOR i:=1 TO nMut DO // Mutation
      Wähle x zufällig aus Generation(t+1) aus;
      Mutiere ein zufällig gewähltes Bit aus x zufällig;
    END
    t := t+1;
    Bestimme s: f(s) = max f(x) , x ∈ Generation(t)
  UNTIL s erfüllt gewünschte Bedingung
END GenetischeOptimierung
```

Die Fitness-Funktion spielt bei der Erzeugung der nachfolgenden Generation die entscheidende Rolle. Anhand dieser Funktion wird eine **Selektion** vorgenommen. Einige per Zufall und Selektion anhand der Fitness-Funktion aus der Generation ausgewählte Exemplare werden ohne Änderung in die neue Generation übernommen. Die überwiegende Mehrzahl der Individuen der neuen Generation entsteht durch **Kreuzung** zweier Vorfahren. Auch dabei werden mittels

Selektion die Eltern-Individuen ausgewählt. Mittels **Mutation**, die allerdings sehr zurückhaltend eingesetzt werden sollte, werden einige Individuen der neuen Generation verändert.

Die genannten Schritte werden wiederholt ausgeführt, bis in der aktuellen Generation ein Exemplar mit einer gewünschten Eigenschaft vorhanden ist. Auch dieser Algorithmus wird wiederum durch Parameter gesteuert. Die Anzahl *nSel* der Elemente, die durch Selektion übernommen werden, die Zahl *k* der bei der Selektion betrachteten Individuen, die Wahl und Häufigkeit der Kreuzung bis hin zur Mutationsrate *nMut* sind frei wählbare Parameter.

Die Operationen zur Erzeugung eines neuen Individuums für die nächste Generation sind im Einzelnen:

- **Selektion**
  Unter Nutzung der Fitness-Funktion werden gute Individuen herausgefiltert. Da eine Generation sehr viele Elemente enthält, kann die Wettbewerb-Selektion eingesetzt werden. Aus einer festen Anzahl von zufällig gewählten Elementen (zum Beispiel sieben) wird der Gewinner in die neue Generation übernommen.
- **Kreuzung**
  Zwei Eltern-Individuen werden selektiv ermittelt. Diese werden so gekreuzt, dass zwei Kinder entstehen. Die 2-Punkte-Kreuzung kann auch verallgemeinert werden zu einer *n*-Punkte-Kreuzung, bei der die Abschnitte entsprechend abwechselnd ausgetauscht werden. Die uniforme Kreuzung betrachtet jede Komponente (Bit), wobei entweder eine Kreuzungsmaske den Tausch anzeigt, oder ein Zufallsprinzip benutzt wird (Bild 6.35).
- Die **Mutation** kann als Bit-Inversion eines zufällig gewählten Bits eines zufällig gewählten Individuums realisiert werden.

Ein recht anschauliches Beispiel für die Erzeugung eines gewünschten Programms mittels genetischer Optimierung ist in [Nil98] zu finden. Eine Reihe von Büchern, die sich mit neuronalen Netzen befassen, gehen ebenso auf den Einsatz genetischer Algorithmen für die Ermittlung geeigneter Lernparameter ein.

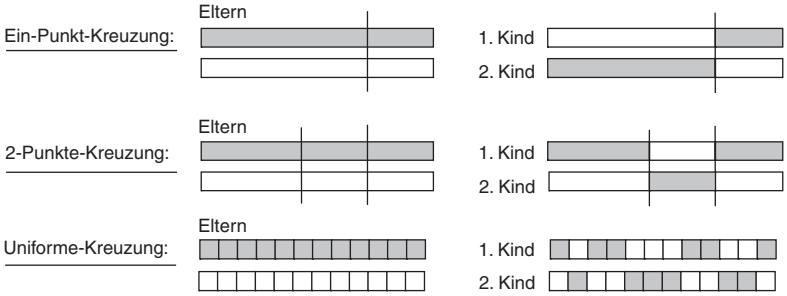


Bild 6.35 Kreuzungsarten

Übung 6.32 Speicherkapazität

Was versteht man unter der Speicherkapazität eines Netzes?

Übung 6.33 Speicherkapazität

Wie kann die Speicherkapazität eines Netzes bestimmt werden?

Übung 6.34 Optimierung

Mit welchem Ziel werden neuronale Netze optimiert?

Übung 6.35 Genetische Optimierung

Wie können genetische Algorithmen für die Optimierung neuronaler Netze eingesetzt werden?

Übung 6.36 Speicherkapazität

Bestimmen Sie die Speicherkapazität eines Netzes mit 20 Eingabe-Neuronen, einer inneren Schicht von 5 Neuronen und einer Ausgabe-Schicht von 4 Neuronen.

Übung 6.37 Speicherkapzität

Wie hoch ist die Speicherkapazität des Netzes zur Klassifikation der Bankkunden?

Übung 6.38 Genetische Algorithmen in der Praxis

Stellen Sie Anwendungen genetischer Algorithmen zusammen.

Übung 6.39 Bitstring-Codierungen

Legen Sie ausführlich dar, wie ganze (reelle) Zahlen für den Einsatz genetischer Algorithmen codiert werden können.

6.6 Partiell rückgekoppelte Netze

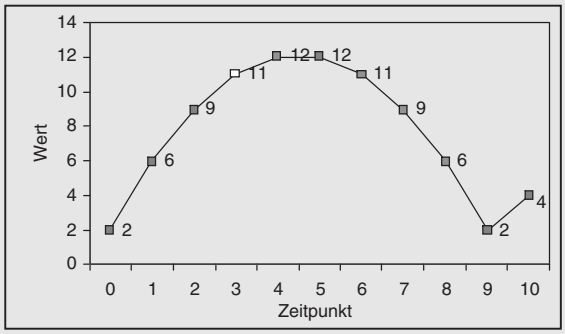
Ein rein vorwärtsgerichtetes Netz produziert nach Abschluss der Trainingsphase für ein Eingabemuster stets dieselbe Ausgabe. Dies gilt auch, falls ihm dieses Eingabemuster mehrfach und in unterschiedlichen Zusammenhängen präsentiert wird. Diese Netze sind nicht in der Lage, Kontext-Informationen zu berücksichtigen. Anhand einer stark vereinfachten Aufgabe wird das Problem deutlich:

Beispiel 6.6 Kurvenverlauf

Nehmen wir an, es soll anhand der Koordinaten einer Kurve der nächste Punkt des Kurvenverlaufs vorausgesagt werden. Weiterhin seien in einem Beobachtungszeitraum $t = 0, t = 1, t = 2 \ldots$ nacheinander diese Werte ermittelt worden:

$2, 6, 9, 11, 12, 12, 11, 9, 6, 2, 4 \ldots$

Lässt sich der nachfolgende Wert aus der Kenntnis des aktuellen Wertes vorhersagen?



Aus dem Kurvenverlauf ist leicht zu erkennen, dass nur die Kenntnis des aktuellen Wertes, zum Beispiel der 9, nicht ausreicht, den darauf folgenden Wert zu prognostizieren. Sowohl 11 als auch 6 sind in unserem Beispiel möglich. Selbstverständlich bietet sich die Möglichkeit, die Zahl der Eingangswerte zu erhöhen. Unter Berücksichtigung des jeweils vorherigen Wertes ergeben sich Wertepaare: (6,9), (9,11), (11,12) … (11,9), (9,6) … Für jedes dieser Paare kann jeweils der nächste Wert sicher prognostiziert werden.

Je nach Problemstellung können durch eine geeignete Wahl eines solchen „Eingabefensters“ zufriedenstellende Resultate für eine Prognose erreicht werden. Biologisch motiviert wäre ein **Erinnerungsvermögen** eines Netzes. Das Netz greift bei der Bearbeitung einer Eingabe auf die vorher abgeleiteten Ergebnisse zurück.

Diese Möglichkeit bieten partiell rückgekoppelte Netze. Die Architektur dieser Netze ist so angelegt, dass die zeitliche Aufeinanderfolge der Eingabedaten einen Einfluss auf das Ergebnis hat. Dazu werden Informationen aus einem Verarbeitungsschritt zeitverzögert in die Bearbeitung des nachfolgenden Musters übernommen.

Die im Folgenden vorgestellten Jordan-Netze und Elman-Netze sind immer dann einsetzbar, wenn die zu ermittelnde Netzausgabe nicht nur von der aktuellen Eingabe, sondern auch von der Geschichte der Arbeit des Netzes abhängt.

6.6.1 Jordan-Netze

Im Beispiel 6.6 ist es ausreichend, jeweils einen Vorgänger zu betrachten, um den Nachfolger sicher prognostizieren zu können. Um entscheiden zu können, ob auf eine 9 die 11 oder eine 6 folgt, reicht es aus, allein den direkten Vorgänger zu betrachten. Im Jordan-Netz wird dazu die Ausgabe im Zeitschritt t rückgekoppelt und im Zeitschritt $t+1$ wieder als der Teil der Eingabe betrachtet. **Jordan-Netze** benutzen für diese **Rückkopplung** so genannte **Kontext-Neuronen**, deren Anzahl genau der Anzahl der Ausgabe-Neuronen entspricht.

Aus Bild 6.36 ist die Architektur eines Jordan-Netzes ersichtlich. Ein- und Ausgabeschicht sowie die innere Schicht können frei gewählt werden. Die Zahl der Kontext-Neuronen jedoch ist festgelegt und ist gleich der Anzahl der Ausgabe-Neuronen. Die Eingabe-Schicht ist voll mit

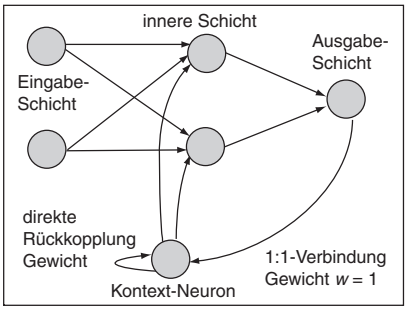


Bild 6.36 Jordan-Netz bestehend aus zwei Eingabe-, zwei verdeckten, einem Ausgabe-Neuron und einem Kontext-Neuron

der inneren Schicht, diese wiederum voll mit der Ausgabe-Schicht vernetzt. Dazu besteht je eine Verbindung von einem Ausgabe-Neuron zu einem zugehörigen Kontext-Neuron.

Eine Verbindung von einem Ausgabe-Neuron zu einem Kontext-Neuron ist mit einem festen Gewicht $w = 1$ versehen und kann nicht trainiert werden. Die Kontextzellen sind wiederum voll mit der inneren Schicht verbunden. Diese Verbindungen werden wie normale vorwärtsgerichtete Verbindungen betrachtet und entsprechend auch trainiert.

Da die einzigen rückwärtsgerichteten Verbindungen feste Gewichte besitzen, sind alle trainierbaren Verbindungen vorwärtsgerichtet, so dass zum Trainieren von Jordan-Netzen der **Backpropagation-Lernalgorithmus** angewendet werden kann.

Die Kontext-Neuronen können zusätzlich direkte Rückkopplungen aufweisen. Damit kann der Einfluss „älterer“ Muster gesteuert werden. Die Stärke des Erinnerungsvermögens wird durch einen vorgegebenen, festen Faktor λ gesteuert.

Im JavaNNS findet sich ein einfaches und anschauliches Beispiel. Aus Koordinaten (Wertepaaren) soll das Netz die jeweils nachfolgende Koordinate prognostizieren, so dass im Ergebnis eine liegende Acht entsteht (Bild 6.37).

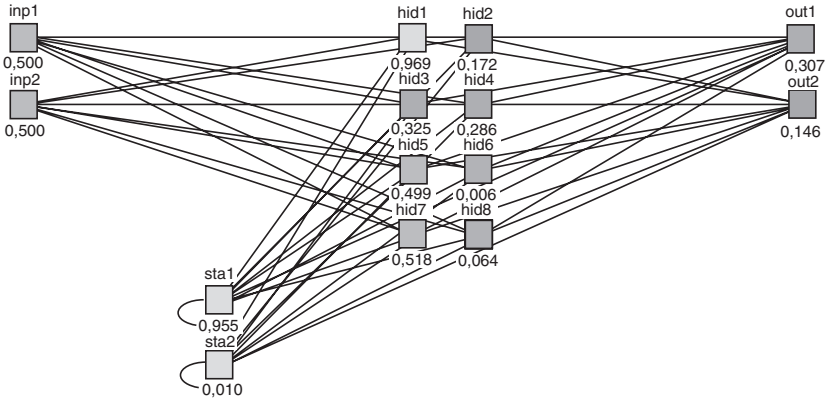
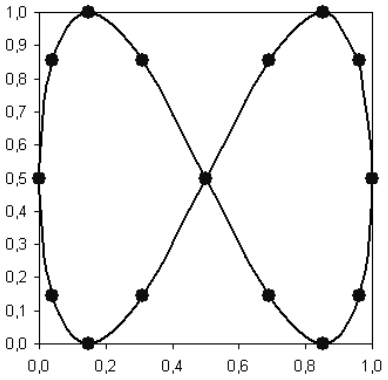


Bild 6.37 Das Jordan-Netz aus dem JavaNNS für das Problem der liegenden Acht

Bild 6.38 basiert auf der Visualisierung der Koordinaten. Aufeinanderfolgende Punkte sind durch eine Linie verbunden. Daneben liegt die durch das JavaNNS-Netz ermittelte Acht, die sich aus der Folge der prognostizierten Werte ergibt.

Das **Erinnerungsvermögen** ist notwendig, um im Kreuzungsbereich $(x, y) = (0.5; 0.5)$ die jeweilig richtige Voraussage treffen zu können. Hierzu wurde das Netz mit den Koordinaten-Paaren trainiert. Die Trainingsausgabe zum Zeitschritt t wird zur Trainingseingabe zum Zeitschritt $t+1$.



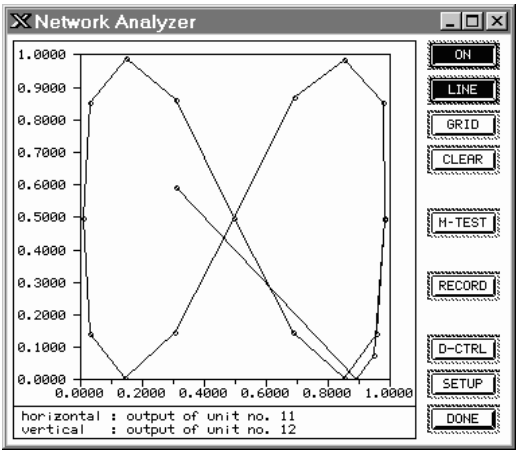


Bild 6.38 Bilder einer liegenden Acht, links Trainingsdaten, rechts Netzausgabe

Diesem Beispiel liegt eine weitere Vereinfachung zugrunde. Die Prognosefehler werden durch die jeweils korrekte Eingabe im nächsten Zeitschritt zum Teil ausgeglichen. Interessant wäre es, aus den Prognosedaten des Netzes einen komplett neuen Eingabedatensatz zu erstellen und diesen zum Testen zu verwenden. Noch realistischer ist es, die Ausgabe direkt an die Eingabe weiterzureichen. Dabei ist zu erwarten, dass sich ein Fehler selbst verstärkt und zu größeren Abweichungen führt.

6.6.2 Elman-Netz

Da die Zahl der Ausgabe-Neuronen durch das zu lösende Problem bestimmt ist, liegt damit in einem Jordan-Netz auch die Zahl der Kontext-Neuronen fest. Dies kann zu Einschränkungen in den Rückkopplungen führen. Um hier etwas flexibler vorgehen zu können, hat Elman vorgeschlagen, die Rückkopplungen von der inneren Schicht und nicht von der Ausgabeschicht aus zu steuern. Ein **Elman-Netz** benutzt damit so viele Kontext-Neuronen, wie Neuronen in der inneren Schicht vorhanden sind.

Die Größe der inneren Schicht kann leichter variiert werden, da diese nicht direkt aus der Problemstellung heraus festgelegt ist. In unserem Eingangsbeispiel könnte man versuchen, mit zwei Kontext-Neuronen und zwei inneren Neuronen bessere Voraussagen zu erzielen. Diese Variabilität führt dazu, dass die Zahl der Kontext-Neuronen leichter als bei Jordan-Netzen geändert werden kann. Daraus resultierend lassen sich mit Elman-Netzen häufig bessere Resultate für eine Anwendung erzielen.

Ob Elman-Netze direkte Rückkopplungen aufweisen, wird in der Literatur unterschiedlich gesehen. Man kann Elman-Netze ohne Rückkopplungen natürlich stets als einen Spezialfall betrachten, bei dem der Rückkopplungsfaktor $\lambda = 0$ gesetzt wird.

Mit dem Elman-Netz können dieselben Aufgaben wie mit dem Jordan-Netz bearbeitet werden.

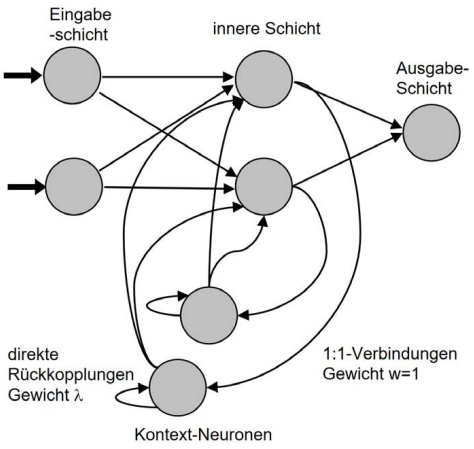


Bild 6.39 Ein 2-2-1-Elman-Netz

Übung 6.40 Vergleich Elman-Jordan

Vergleichen Sie den Aufbau eines Jordan-Netzes mit dem Aufbau eines Elman-Netzes.

Übung 6.41 Backpropagation

Welche Änderungen im Backpropagation-Algorithmus müssen für das Lernen partiell rekursiver Netze vorgenommen werden?

Übung 6.42 Eine liegende Acht

Benutzen Sie den JavaNNS und machen Sie sich mit dem Beispiel der Koordinaten-Prognose der Punkte, die eine liegende Acht ergeben, vertraut.

Übung 6.43 Vergleich Elman-Jordan

Vergleichen Sie das Verhalten des Jordan-Netzes mit dem Verhalten des Elman-Netzes.

Übung 6.44 Sinuskurve

Versuchen Sie mittels eines rückgekoppelten Netzes, den Kurvenverlauf einer Sinus-Funktion zu „prognostizieren“. Unter Eingabe eines Wertes soll der nächste Sinus-Wert vorhergesagt werden.

Übung 6.45 Implementierung

Erweitern Sie Ihre Implementation eines vorwärtsgerichteten Netzes um die Möglichkeit einer partiellen Rückkopplung. Passen Sie den Lernalgorithmus entsprechend an.
Referate

Übung 6.46 Anwendungen

Geben Sie einen Überblick über Anwendungen partiell rückgekoppelter Netze.

6.7 Convolutional Neural Network

Ein *Convolutional Neural Network* (CNN) ist ein vorwärts gerichtetes neuronales Netz mit einer besonderen Struktur. Auf dem ersten Blick widerspricht ein CNN den theoretischen Aussagen über mehrschichtige vorwärts gerichtete neuronale Netze. Die Theorie sagt, dass jedes Muster von einem Netz erkannt werden kann, welches maximal zwei innere Schichten aufweist. Ein CNN dagegen besitzt mehrere, ja viele Dutzend Schichten und kann nun Muster besser erkennen als einfache, vorwärts gerichtete neuronale Netze. Allgemein wird der Durchbruch der CNN mit dem Artikel von Szegedy u.a. auf der IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition 2015 in Verbindung gebracht [SLJ+15].

CNN sind Netze, die vorrangig für die Bilderkennung entwickelt wurden. Hier stoßen die normalen vorwärts gerichteten Netze schnell an Leistungsgrenzen. Betrachten wir eine von Hand geschriebene Ziffer in einer Pixel-Darstellung von 28x28 Bildpunkten. Das ist ein sehr kleines Bild. Fügt man noch für jeden Bildpunkt, die drei Werte der RGB-Farbskala hinzu, so hat jedes Neuron der nachfolgenden Schicht bereits 28x28x3 = 2.352 Verbindungen. Das ist an sich noch kein Problem, betrachten wir jedoch halbwegs realistische Bilder mit einer Auflösung von nur 800x800, so sind es knapp zwei Millionen Verbindungen je Neuron.

Bild 6.40 Handschriftliche Ziffern 3 aus dem MNIST-Datensatz

Neben der Behandlung der Auflösung spielt die räumliche Anordnung von zu erkennenden Objekten im Eingabebild eine große Rolle. Herkömmliche vorwärts gerichtete Netz können Objekte nicht mehr erkennen, wenn diese im Eingabe-Bild verschoben sind.

Beide Probleme werden mit Hilfe einer Dimensionsreduktion, die innerhalb eines CNN stattfindet, angegangen. Die grundlegende Operation, der die Netze ihren Namen verdanken, ist die *convolution operation*, die *Faltung*, eine in der Mathematik in der Funktionalanalysis eingesetzte Operation.

Die Faltung wird von Lohninger[1] mit dem Vorgang an einer Lochkamera veranschaulicht. Das Loch sorgt für ein verrauschtes Abbild in der Kamera, da sich benachbarte Bereiche überlagern. Man kann sich also vorstellen, dass ein Filter über das Bild wandert und ein verrauschtes, eventuell etwas verkleinertes Abbild erzeugt, siehe Bild 6.41 auf der nächsten Seite.

[1] siehe *http://www.statistics4u.info/fundstat_germ/cc_convolution.html*, letzter Zugriff am 22.11.2019

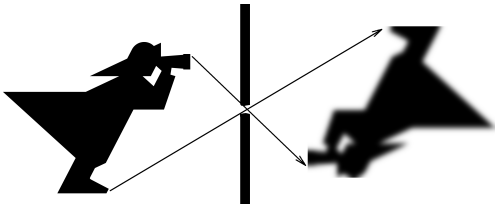


Bild 6.41 Durch das Abtasten des Originals entsteht in einer Lochkamera ein verwaschenes Bild

Die Faltungsoperation wird in einer entsprechenden Schicht, dem Convolutional Layer eingesetzt. Eine Faltungsschicht ist aber nur eine von drei Arten von Schichten, die in einem CNN zusammengeschaltet werden, siehe Bild 6.42:

1. Faltungsschicht (convolutional layer)
2. Pooling Layer (Zusammenfassung)
3. Voll-vernetzte Schichten für die finale Identifikation oder Klassifikation

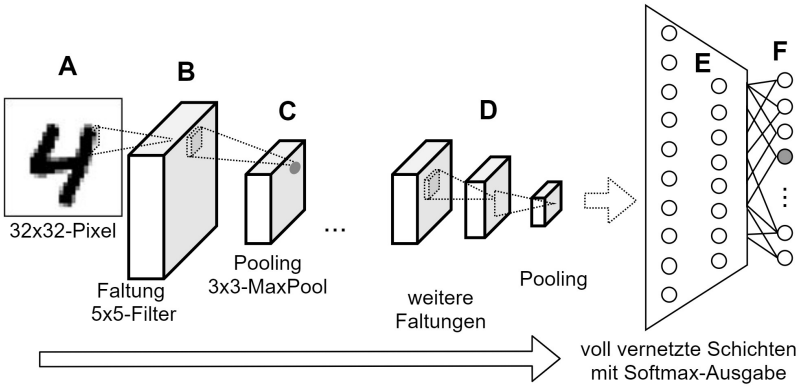


Bild 6.42 Struktur eines Convolutional Neural Networks

Bild 6.42 zeigt, wie diese drei unterschiedlichen Arten von Schichten von der Eingabe A bis zur Ausgabeschicht G zusammengeschaltet werden:

A. Das Eingabe-Bild ist in der Regel farbig und wird in drei RGB-Farb-Ebenen aufgeteilt. Im Bild ist wird ein Graustufen-Bild verwendet und daher besteht die Eingabe nur aus einer Ebene.

B. Eine Faltungsschicht (Convolutional Layer) entsteht durch die Anwendung eines Filters auf die davorliegende Schicht, hier die Eingabe.

C. In einer Zusammenfassung (Pooling Layer) werden die Daten der vorangegangenen Schicht stark verdichtet: Dies geschieht indem beispielsweise aus einem 3x3-Fenster nur der Maximalwert dieses Bereiches weitergeleitet wird.

D. Die Kopplung aus Faltungsschicht und Pooling Layer kann noch mehrmals hintereinander geschaltet dem Netz hinzugefügt werden.

E. Ein „normales“ vorwärts gerichtetes neuronales Netz beendet die Verarbeitung.

F. In der Ausgabeschicht wird das Ergebnis der Klassifikation anhand der Aktivität der Neuronen sichtbar.

Die Verarbeitung in den einzelnen Schichten schauen wir uns genauer an.

Die Faltungsschicht

In der *Faltungsschicht* wird ein Filter, dessen Dimension deutlich kleiner ist, als die des Ausgangsbildes schrittweise, also Pixel für Pixel, über das Bild geführt. Zum Beispiel kann für die Analyse der geschriebenen Ziffer mit der Dimension 28x28 ein Filter der Größe 5x5 eingesetzt werden. Die Zahlen werte für die Filter werden zufällig gewählt und dann während des Trainings angepasst. Auch der Einsatz der sogenannten Sobel-Filter zur Detektierung von Kanten ist möglich.

In Anlehnung an [Agg18] geben wir hier ein Beispiel für den Faltungsschritt an. Wir betrachten ein Bild der Größe 8x8 und lassen einen 3x3-Filter darüber laufen. Anhand eines Fensters ist die Berechnung veranschaulicht und im rechten Teil des Bildes ist das Ergebnis ersichtlich. Dieses neue Bild hat nun eine geringere Dimension als das Ausgangsbild.

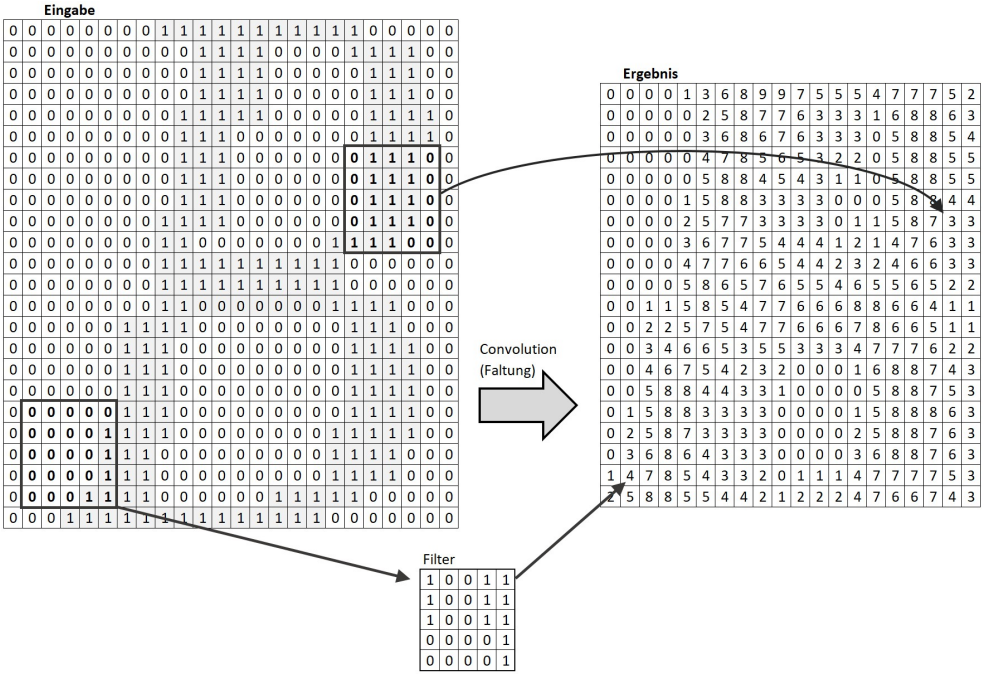


Bild 6.43 Berechnungen in einem Faltungsschritt für die Eingabe 'B'

Bild 6.43 verdeutlicht das Vorgehen. Die Werte im Eingabe-Ausschnitt werden mit den entsprechenden Werten im Filter multipliziert und addiert. Dieser Wert wird in die Ausgabe an die Position übernommen, an der der jeweilige Ausschnitt in der Eingabe positioniert ist. Sei dim_S die Dimension der betrachteten Schicht und dim_F die Größe des Filters, dann ergibt sich für die Größe der Schicht S' nach der Faltung: $dim_{S'} = dim_S - dim_F + 1$. Wir betrachteten hier

nur quadratische Schichten, so dass eine 28x28-Schicht nach der Faltung mit einem 5x5-Filter eine Größe von 24x24 aufweist.

Die Position i, j in der Ausgabe S' wird konkret wie folgt berechnet:

$$s'_{ij} = \sum_{m=1}^{dim_F} \sum_{n=1}^{dim_F} s_{i+m,j+n} \cdot f_{mn} \qquad \text{für } 1 \leq i, j \leq (dim_S - dim_F + 1) \tag{6.14}$$

Will man eine Verkleinerung der Schichten während einer Faltung vermeiden, die auch zu kleinen Informationsverlusten am Rande führt, so sind die Ränder um die Ausgangsschicht mit Werten aufzufüllen. Man spricht vom *Padding*. Wird im Bild 6.43 auf der vorherigen Seite um die Ausgangsschicht auf allen Seiten eine Reihe von Nullen aufgefüllt, so produziert die Faltung mit dem Filter der Größe 3x3 ein Ergebnis, welches gleich groß zur Eingabe ist. Die Größe der Padding-Schicht ist durch die Größe des Filters dim_F gegeben: Es werden $\frac{dim_F - 1}{2}$ in jeder Zeile sowie Spalte sowohl am Anfang als auch am Ende hinzugefügt.

Betrachten wir eine handschriftliche Vier, wie diese im Strukturbild 6.42 auf Seite 253 als Eingabe gezeigt wird und gehen daran den Faltungsschritt in einem CNN durch. Die Vier liegt vereinfacht als 16x16 Pixel großes, 3-bit-Graubild vor, siehe Bild 6.44.

Bild 6.44 Ziffer 4 als 16x16 Pixelmap mit 3-bit Graustufen

Die entsprechenden Pixel-Codierungen sind im Bild 6.45 links zu sehen. Darauf wird der in der Bildmitte dargestellte 3x3 Sobel-Filter für die Detektierung vertikaler Kanten angewendet. Das Ergebnis im Bild rechts zeigt, dass dabei sehr schnell sehr große Werte entstehen. Daher werden in der Praxis die Bildwerte vor der Verarbeitung in den Bereich $[-0.5, +0.5]$ normiert, siehe Bild 6.46 auf der nächsten Seite.

7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
7	7	7	6	6	6	6	5	6	5	7	7	7	7	7	7
7	7	7	6	0	0	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7
7	7	5	2	0	1	6	7	7	6	5	7	7	6	7	7
7	7	7	5	0	1	7	7	7	7	5	6	6	7	7	7
7	7	6	6	0	0	7	7	7	1	0	6	6	7	7	7
7	7	6	6	0	0	6	7	6	1	0	5	5	7	7	7
7	5	6	6	0	0	6	7	6	0	0	5	6	5	7	7
7	5	5	5	0	0	5	5	5	0	0	6	5	6	7	7
7	5	5	5	0	0	1	0	0	1	0	0	5	6	7	7
7	7	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	7	7
7	7	5	5	5	5	3	3	3	0	0	5	5	6	7	7
7	7	6	5	5	5	5	5	5	0	0	5	6	7	7	7
7	7	7	6	6	5	5	5	5	0	0	6	7	7	7	7
7	7	7	7	7	7	6	6	6	0	2	7	7	7	7	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

0	-3	-9	-7	4	3	0	0	4	7	1	0	0	0	
-2	-8	-20	-13	16	15	1	-1	1	7	4	-1	0	1	
-4	-13	-24	-12	24	23	2	-2	-5	3	6	-1	1	2	
-3	-10	-25	-15	27	25	1	-7	-13	4	10	2	3	1	
-3	-5	-25	-22	27	27	0	-18	-22	13	18	5	5	0	
-4	-2	-24	-24	25	28	0	-25	-25	18	22	5	6	2	
-5	1	-23	-23	23	26	0	-25	-23	20	22	2	6	5	
-7	1	-21	-21	17	17	-1	-16	-16	16	21	6	7	5	
-8	-2	-20	-20	7	5	-2	-3	-5	4	15	18	13	4	
-8	-6	-15	-15	-1	-2	-1	-2	-3	4	10	19	18	4	
-7	-8	-6	-5	-4	-4	0	-11	-11	15	16	10	12	3	
-4	-7	-3	-1	-3	-2	0	-18	-18	21	24	6	4	1	
-1	-4	-3	-2	-3	-1	0	-21	-19	24	25	4	1	0	
0	-1	-1	-1	-3	-2	0	-17	-13	20	17	1	0	0	

Bild 6.45 3-bit Grauwerte der Ziffer 4 und Anwendung eines Sobel-Filters

Darauf wird hier in unserem Beispiel ein Sobel-Filter für die Detektierung vertikaler Kanten angewendet.

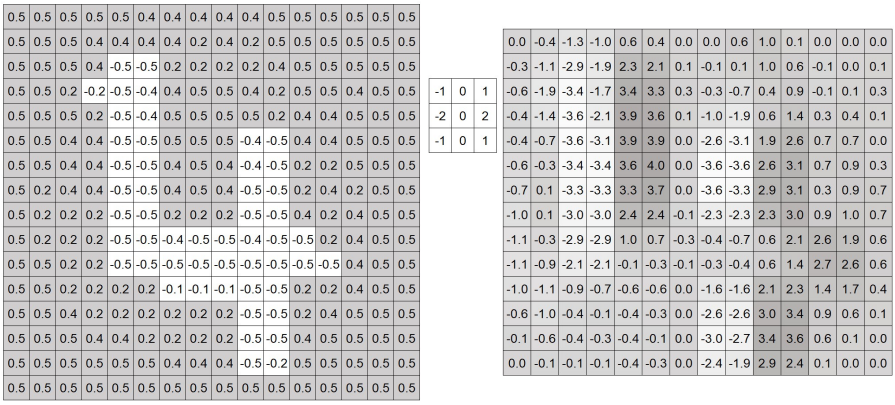


Bild 6.46 Faltung der normierten Vier mittels Sobel-Filter

Wird auf das Ergebnis der Faltung nun die RelU-Aktivierungsfunktion angewendet, werden die vertikalen Kanten des Bildes sichtbar, Bild 6.47

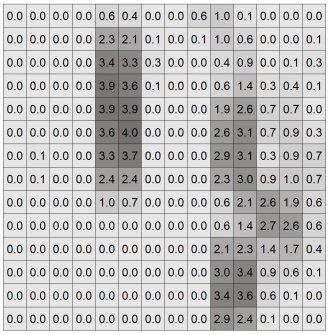


Bild 6.47 Detektierte vertikale Kanten nach Faltung

Die Zusammenfassung – das Pooling Layer

Auf eine Faltungsschicht (Convolution Layer) folgt eine Zusammenfassung (*Pooling Layer*). Mit dem Pooling wird die Größe der Schicht, die die Eigenschaften des Originalbildes noch in sich trägt, stark verkleinert. Die Ausgangsschicht, die *Feature Map*, ist empfindlich gegenüber unterschiedlichen Positionen eines gesuchten Objektes im Bild. Ein Bild mit einer Katze links im Bild ist völlig verschieden von einem Bild, auf dem die Katze in der Mitte oder rechts zu sehen ist. Mit der Reduzierung der Dimension, bei gleichzeitiger Beibehaltung der wesentlichen Informationen, begegnet man diesem Problem. Die so erzeugte neue Feature Map ist dann stabiler gegen räumliche Verschiebungen der Objekte. Die vorhandenen Eigenschaften

in der Feature Map werden beim Pooling summiert und so komprimiert weitergegeben. Für das Pooling sind zwei Verfahren gebräuchlich:

- Durchschnitt (Average Pooling):
  Es wird der Durchschnitt aller Werte des Ausschnittes auf der Feature Map gebildet.
- Maximum (Max Pooling):
  Es wird der Maximalwert aus dem Ausschnitt der Feature Map gesucht.

Mit dem Pooling-Schritt sollte sich die Dimension der Feature Map etwa halbieren. Bild 6.48 zeigt das Pooling, wobei hier zwei verschiedene Schrittweite für das Wandern des Pooling-Filters über das Bild gezeigt werden.

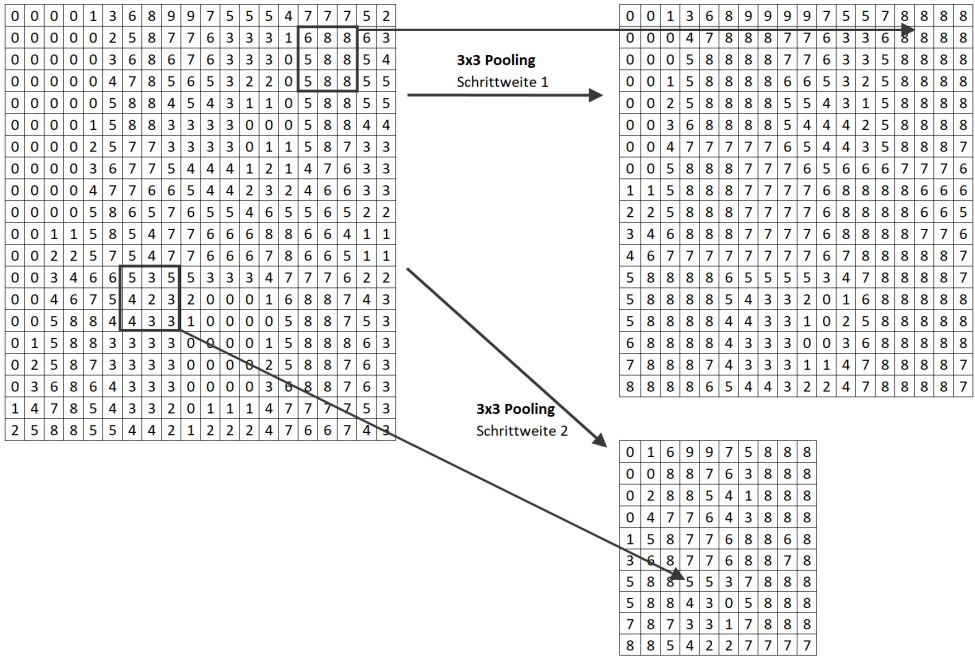


Bild 6.48 Max-Pooling mit unterschiedlichen Schrittweiten

Voll-vernetzte Schichten für die Klassifikation

Am Ende eines Convolutional Neural Networks wird ein herkömmliches vorwärts gerichtetes neuronales Netz angefügt. Dieses besteht in der Regel aus ein oder zwei voll vernetzten Zwischenschichten (hidden layer) und einer wiederum voll vernetzten Ausgabeschicht. Die Größe der Ausgabeschicht richtet sich wie in den vorangegangenen Abschnitten ausgeführt nach der Zahl der Klassen, die das Netz erkennen soll. Die Vorhersage einer Klasse zur gerade verarbeiteten Eingabe erfolgt nach dem Softmax-Prinzip. Die Aktivierungen aller Neuronen der Ausgabeschicht werden normiert und so sind prozentuale Aussagen über die Zugehörigkeit zu einer Klasse möglich. Vorhergesagt wird die Klasse mit der höchsten normierten Aktivität (Softmax).

Das Training

Das Training in einem CNN erfolgt ähnlich wie im Abschnitt 6.2 „Backpropagation-Netze“ beschrieben. Es ist ein überwachtes Lernen, Trainingsdaten müssen vorhanden sein. Zum einen wird auch der Fehler in der Ausgangsschicht für das Training zugrunde gelegt und zum anderen erfolgt eine Anpassung der Gewichte von hinten nach vorn, von der Ausgabeschicht über die vollvernetzten Schichten und die Pooling- und Convolution-Schichten bis zur ersten Convolution-Schicht.

In der vollvernetzten Netz-Schicht am Ende eines CNN (siehe Schichten E und F in Bild 6.42 auf Seite 253 wird in der Ausgabeschicht der Fehler ermittelt und daraus ein Fehlersignal ermittelt, welches für die Anpassung der Gewichte der davorliegenden Schicht genutzt wird. Das Training dieser Schicht verläuft im Wesentlichen so, wie für die Backpropagation-Netze beschrieben.

Die Pooling-Schicht kann nicht trainiert werden, da hier ja weder Gewichte noch Schwellwerte genutzt werden. Dennoch muss das Fehlersignal (der Fehler-Gradient) weitergeleitet werden. In einem Max-Pooling-Schritt wird nur das Maximum aus einem Bereich der davorliegenden Schicht in die neue Schicht übernommen (siehe Bild 6.48 auf der vorherigen Seite), alle anderen Werte eines Bereiches tragen nicht zur Weiterverarbeitung, somit nicht zur berechneten Ausgabe und damit auch nicht zum Fehler bei. Das Fehlersignal wird nur an die Positionen in der Zwischenschicht zurückgegeben, an der das Maximum steht.

Das Trainieren in einer Faltungsschicht ist das Besondere in einem CNN. Bei einem Faltungsschritt wird jeder Filterwert einmal mit jedem Pixelwert multipliziert und geht mindestens einmal in die Berechnung der Ausgabe des Faltungsschritts ein. Damit trägt jeder Filterwert auch zum Gesamtfehler bei. Daraus ist zu schließen, dass alle Filterwerte im Trainingsprozess gemäß einem berechneten Fehlersignal angepasst werden müssen.

Betrachten wir hierzu die oben genannte Berechnung in einem Faltungsschritt und leiten daraus die Korrektur für den Filter ab:

$$\begin{aligned} s'_{i,j} &= faltung(s, filter) \\ &= \sum_{m=1}^{dim_F} \sum_{n=1}^{dim_F} s_{i+m,j+n} \cdot filter_{m,n} \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial s'_{i,j}}{\partial filter_{m,n}} = s_{i+n,j+m} \tag{6.16}$$

Für die Veränderung eines Filterwertes wird dann der Gradient wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial L}{\partial s_{n,m}} = \sum_i \sum_j \frac{\partial L}{\partial s'_{i,j}} \cdot \frac{\partial s'_{i,j}}{\partial filter_{m,n}} \tag{6.17}$$

Zusammenfassung

Die Schichten der Faltung und des Poolings können als eine spezielle Form der Bildaufbereitung oder Datenvorbereitung betrachtet werden, auf die aufbauend dann ein vorwärts gerichtetes neuronales Netz die Klassifikation vornimmt.

Für das Trainieren eines CNNs sind sehr große Datenmengen erforderlich. Es werden einige tausend, besser einige zehntausend Bilder benötigt, um ein CNN sinnvoll trainieren zu können. Das macht die Darstellung eines anschaulichen Beispiels anhand kleiner Datenmengen und eines übersichtlichen Netzes unmöglich.

Im Internet steht eine Reihe von frei verfügbaren Trainingsmengen zur Verfügung. Die bekannteste ist der MNIST-Datensatz von handgeschriebenen Ziffern. Wenn Sie mit Python und den entsprechenden Bibliotheken arbeiten, so ist MNIST bereits in der Bibliothek Keras[2], der Python-Bibliothek für das Deep Learning, enthalten.

Für die Entwicklung von Convolutional Neural Networks wird mittlerweile fast ausschließlich *TensorFlow*[3] eingesetzt.

TensorFlow ist eine Open-Source-Plattform für das maschinelle Lernen und unterstützt mehrere Sprachen, darunter Python.

Übung 6.47 Aufbau CNN

Erläutern Sie die Struktur eines Convolutional Neural Network.

Übung 6.48 Sobel-Filter

Suchen Sie im Internet nach einem Sobel-Filter zur Detektierung horizontaler Kanten und wenden Sie diesen Filter auf das Beispiel der Ziffer 4 in Bild 6.45 auf Seite 255 an.

Übung 6.49 Pooling

Führen Sie sowohl Max-Pooling als auch Mittelwert-Pooling für das Beispiel der 4 durch.

Übung 6.50 Faltung

Wandeln Sie ein kleines (16x16) Bild in eine 3-bit Grauwert-Darstellung um, und führen Sie eine Faltung, zum Beispiel mit einem Sobel-Filter durch. Die Rechnung kann mit jeder Programmiersprache oder auch in einer Tabellenkalkulation erfolgen.

Übung 6.51 Anwendungen

Recherchieren Sie praktische Anwendungen für CNN und ermitteln Sie nach Möglichkeit deren Struktur.

[2] http://keras.io

[3] TensorFlow, the TensorFlow logo and any related marks are trademarks of Google Inc.

7 Wettbewerbslernen

Man spricht vom Wettbewerbslernen, wenn die Aktivierung eines Neurons nicht nur von der eigenen Netzeingabe abhängt sondern erst ein Vergleich der Netzeingaben mehrerer (aller) Neuronen über die endgültige Aktivierung entscheidet.

Nur der Sieger des „Wettbewerbs“ wird aktiviert, alle anderen Neuronen werden inaktiv. Dieses auch **winner takes all** genannte Vorgehen wird von allen in diesem Kapitel vorgestellten Netz-Architekturen genutzt.

Eine selbstorganisierende Karte bestimmt ein Gewinner-Neuron und nimmt somit eine Klassifizierung der Eingabe vor. Die Erkennungsschicht eines ART-Netzes ermittelt ebenfalls einen Gewinner. Unterschiedlich ist die Art und Weise der Ermittlung des Gewinners. Die neuronalen Gase umfassen mehrere im Detail unterschiedliche Formen des Wettbewerbslernens zur Anpassung von Neuronen an einen Eingaberaum.

Es werden nach der Art der Gewichtsadaption zwei Formen des Wettbewerbslernens unterschieden:

- Bei einem **harten Wettbewerbslernen** werden nur die Gewichte im Zusammenhang mit dem Gewinner-Neuron angepasst.
- **Weiches Wettbewerbslernen** verändert nicht nur die Parameter des Gewinners, sondern auch Parameter anderer Neuronen, meist Neuronen in der Nachbarschaft des Gewinner-Neurons.

Für alle Formen des Wettbewerbslernens kann ein allgemeiner Lernprozess durch folgenden Algorithmus beschrieben werden:

Listing 7.1 Algorithmus Wettbewerbslernen

```
PROCEDURE Wettbewerbslernen
  REPEAT
    Wähle zufällig Muster aus und lege dies an das Netz;
    Bestimme Gewinner-Neuron für das Muster;
    Bestimme Nachbarschaft des Gewinner-Neurons; (1)
    Verändere Gewichte der Verbindungen von:
      - Eingabe-Neuron zu Gewinner-Neuronen
      - Eingabe-Neuronen zu Nachbarschaft-Neuronen
    Verändere die Netz-Struktur (2)
    Verändere die Parameter,
      beispielsweise Verringerung Lernparameter und Nachbarschaftsweite
  UNTIL gewünschte Anpassung erreicht;
END Wettbewerbslernen
```

Für ein hartes Wettbewerbslernen entfällt die Aktion (1). Dies kann auch durch eine Nachbarschaftsweite von null ausgedrückt werden. Für Netze mit festen Strukturen, wie dem neuronalen Gas, entfällt die Aktion (2).

7.1 Selbstorganisierende Karte

Nicht immer können für vorliegende Eingabedaten zugehörige, wünschenswerte Ausgabewerte angeben werden, um das Netz überwacht zu trainieren. Darüber hinaus ist die Angabe eines Ausgabewertes während einer Trainingsphase, aus dem sich dann direkt eine quantitative Veränderung des Verhaltens ableiten lässt, im biologischen neuronalen Netz nicht gegeben. Der Mensch ist in der Lage, viele Dinge zu unterscheiden oder auch zusammenzufassen, ohne dass ihm vorher explizit gesagt wurde, was richtig ist: Wir sind in der Lage *Klassen zu bilden*.

Die **selbstorganisierenden Karten**, **Self-Organizing Maps (SOM)**, nach ihrem Entwickler auch **Kohonen-Karten** oder **Kohonen Feature Map** genannt, sind eine Form neuronaler Netze, die in der Lage ist, ein klassifizierendes Verhalten ohne vorgegebene Trainingsausgaben zu erlernen.

Selbstorganisierende Karten nutzen die räumliche Anordnung der Neuronen und die Nachbarschaftsbeziehungen der Neuronen aus. Auch im menschlichen neuronalen Netz hat die räumliche Anordnung der Neuronen Einfluss auf die Arbeitsweise eines einzelnen Neurons.

Damit wurden die beiden charakterisierenden Merkmale selbstorganisierender Karten angesprochen:

- **Nicht überwachtes Lernen**: Ohne Vorgabe von gewünschten Ergebnissen für Trainingsdaten wird ein klassifizierendes Verhalten erlernt.
- Ausnutzung der **räumlichen Anordnung** der Neuronen: Neuronen beeinflussen das Verhalten benachbarter Neuronen.

Aus diesen Merkmalen lassen sich die typischen Anwendungen einer selbstorganisierenden Karte ableiten. In Datenmengen können Klassifizierungen erkannt werden, die bisher nicht bekannt waren. Diese Aufgabe stellt sich besonders im Rahmen des **Data Mining**. Selbstorganisierende Karten wurden darüber hinaus auch für Prognose-Aufgaben eingesetzt. Dabei erhofft man sich aufgrund der Eingabe des historischen Geschehens eine Unterteilung in Klassen, wie „stark fallend“, „schwach fallend“, „neutral“, „steigend“ sowie „stark steigend“. Auf eine untypische, aber erfolgreiche Anwendung selbstorganisierender Karten zur Optimierung wird im Abschnitt 7.1.4 eingegangen.

7.1.1 Architektur und Arbeitsweise

Eine SOM besteht aus zwei Schichten, einer **Eingabeschicht** und einer **Karten-Schicht**, wie das Bild 7.1 zeigt. Die Karten-Schicht wird meist zweidimensional dargestellt. Häufig wird eine quadratische Karten-Schicht benutzt. Nicht-quadratische Schichten sind möglich, führen mitunter sogar zu besseren Resultaten. Ebenso möglich ist eine dreidimensionale Aufteilung der Karten-Schicht. In diesem Buch wird der häufig angewendete zweidimensionale Fall betrachtet. Die Beispiele beschränken sich zudem auf eine quadratische Anordnung der Karten-Schicht.

Die Neuronen der Eingabeschicht sind mit den Neuronen der Karten-Schicht voll vernetzt. Jedes Eingabe-Neuron hat je eine Verbindung zu jedem Neuron der Karten-Schicht. Die Neuronen der Karten-Schicht sind untereinander vollständig verbunden. Direkte Rückkopplungen gibt es jedoch nicht. Die Vielzahl von Verbindungen macht es unmöglich, ein SOM komplett

mit allen Neuronen und allen Verbindungen anschaulich darzustellen. Im Architektur-Bild 7.1 einer SOM wurde deshalb auf die Darstellung der Verbindungen verzichtet.

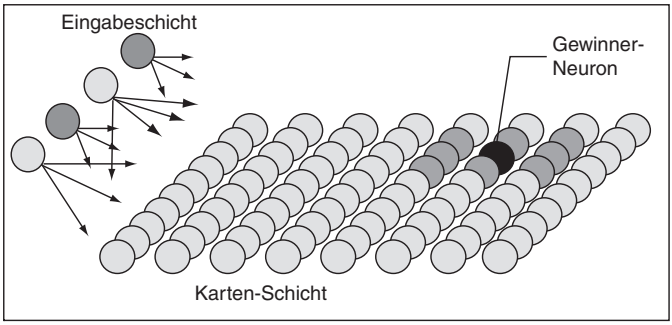


Bild 7.1 Architektur einer SOM

Während des Trainings werden die Daten in ungeordneter Reihenfolge dem Netz immer und immer wieder präsentiert. Die Adaption eines Netzes erfolgt dann so, dass sich für die Musterklassen zugehörige Erregungszentren herausbilden.

Definition 7.1 Erregungszentrum

Ein Erregungszentrum ist ein Neuron der Karten-Schicht, das für alle Eingabe-Muster erregt oder aktiv ist, die einander in einem gewissen Sinne ähnlich sind. Ein Erregungszentrum ist der Repräsentant einer Klasse von Daten.

In einer Menge von Kundendaten, die deren Kaufverhalten widerspiegeln, wird man ohne eine Analyse kaum erkennen, welche Zusammenhänge zwischen einzelnen Kaufentscheidungen bestehen. Die Untersuchungen gestalten sich umso schwieriger, je weniger Vermutungen über die Beziehungen zwischen einzelnen Datenwerten bestehen. Hier können neuronale Netze in Form der selbstorganisierenden Karten erfolgreich eingesetzt werden, da sie eigenständig Gruppierungen vornehmen können.

Beispiel 7.1 Klassifikation von Kundendaten

Das Beispiel der Bankkunden-Daten wird hier unter diesem Gesichtspunkt betrachtet. Hierzu wird erneut auf die Datensätze für Bankkunden zurückgegriffen, wie diese im Abschnitt 6.4.2 mit Hilfe eines vorwärtsgerichteten Netzes bearbeitet wurden. Für diese Daten ist zwar die Klassifikation in schlechte, normale und gute Kunden bekannt, umso interessanter ist daher das Ergebnis des nicht überwachten Lernens einer selbstorganisierenden Karte. Dazu wird die vorgegebene Klassifikation einmal außer acht gelassen und der Klassifikationsvorschlag betrachtet, wie dieser von einer selbstorganisierenden Karte entwickelt wurde.

Es wird eine Unterteilung der Datensätze in die drei Klassen erwartet: schlechte, normale sowie gute Kunden.

Schlechter Kunde	Normaler Kunde	Guter Kunde
1, 2, 4, 7, 11, 14	3, 8, 12	5, 6, 9, 10, 13

Zum besseren Verständnis sind die Datensätze mit ihrer Nummer und der vorgegebenen Ergebnis-Klasse benannt. #11:bad bezeichnet den Datensatz 11, der einen schlechten Kunden beschreibt. Mit einer PASCAL-Toolbox [Kru91] wurde folgende Verteilung der Bankkunden-Datensätze erzielt:

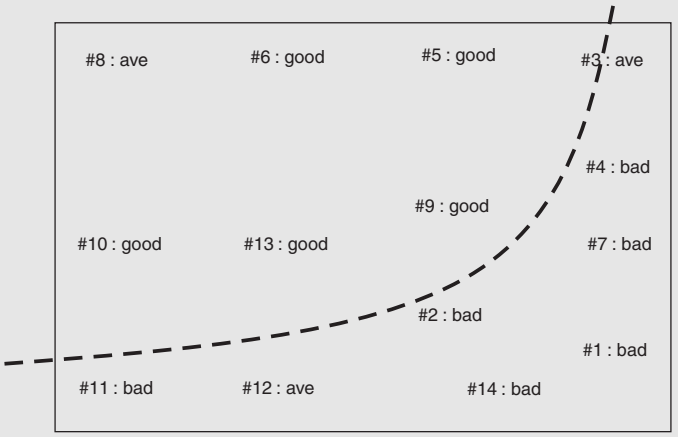


Bild 7.2 Verteilung der Bankkunden-Datensätze

Die drei Klassen sind in der erzielten Verteilung der Erregungszentren für die Datensätze auf der Karte schwer auszumachen.

Die Datensätze sind gemäß einer durch das Netz „erkannten“ Ähnlichkeit durch die selbstorganisierende Karte angeordnet worden. Eine nachträglich gezogene gepunktete Linie gibt eine mögliche Trennung in zwei Gruppen.

Die vom neuronalen Netz im Beispiel 7.1 vorgenommene Klassifikation kann in zwei Richtungen interpretiert werden:

1. Die Daten sind nicht so klar in drei Klassen unterteilbar wie ursprünglich angenommen. Insbesondere die Charakterisierung normaler Kunden ist zweifelhaft. Der normale Kunde mit dem Datensatz 8 ist wohl eher ein guter Kunde, der normale Kunde 12 muss eher den schlechten Kunden zugeordnet werden. Einzig der Kunde 3 ist nicht eindeutig zuzuordnen.

   Es stellt sich die Frage, ob die vorliegenden Beispieldaten charakteristisch genug sind, um eine gewünschte Klassifikation vornehmen zu können.
2. Möglicherweise spiegelt die Codierung der Daten nicht die unterschiedliche Bedeutung der Kunden-Merkmale wider. Auch für eine selbstorganisierende Karte spielt die Datencodierung, wie bereits im Abschnitt 6.2.3 diskutiert, eine Rolle. Binarisierte Eingaben geben keine Information darüber, ob einem speziellen Eingabewert wie beispielsweise dem monatlichen Einkommen eine größere Bedeutung bei der Klassifikation zukommt als anderen.

Wie kann nun eine derartige Klassifikation erzielt werden? Wie lange muss eine selbstorganisierende Karte trainiert werden, um eine entsprechende Klassifizierung zu erhalten? Kann es vorkommen, dass eine Karte zu kurz oder zu lange trainiert wird?

All diese Fragen sind leider nicht einfach und nicht endgültig zu beantworten. Für eine zielgerichtete Beeinflussung des Ergebnisses sind Kenntnisse des Trainingsprozesses einer selbstorganisierenden Karte notwendig, wie sie im folgenden Abschnitt vermittelt werden.

7.1.2 Das Training

Wie eingangs erwähnt werden die Trainingsmuster dem Netz wieder und immer wieder in zufälliger Reihenfolge präsentiert. Wird ein Muster an die Eingabe-Schicht angelegt, so wird für dieses Muster ein **Gewinner-Neuron** aus der Karten-Schicht ermittelt.

Definition 7.2 Gewinner-Neuron

Das **Gewinner-Neuron**, das **Erregungszentrum** z, ist das Neuron mit der maximalen durch die konkrete Eingabe hervorgerufenen Erregung.

Zur Bestimmung des Gewinner-Neurons wird ein Abstand zwischen dem Eingabe-Muster und einem Neuron bestimmt. Der Abstand kann als Abstand zweier Vektoren berechnet werden.

Das Eingabemuster, gebildet aus den Aktivierungen der Neuronen der Eingabeschicht, bildet einen Vektor:

$$m_p = (m_{p1}, m_{p2}, \ldots, m_{pk}) = (o_1, o_2, \ldots, o_k)$$

Der Vektor eines Neurons j der Karten-Schicht wird durch die Gewichte der Verbindungen w_{ij} von der Eingabeschicht zu diesem Neuron j gebildet (vgl. Bild 7.3):

$$W_j = (w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{kj})$$

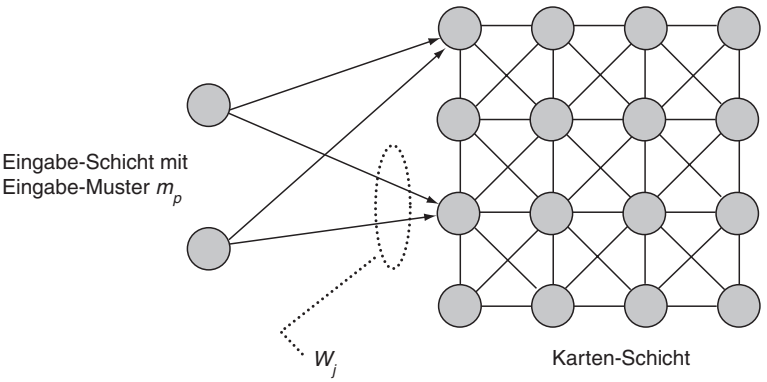


Bild 7.3 Verbindungen zwischen Eingabe- und Kohonen-Schicht

Für die Bestimmung eines Gewinner-Neurons werden zwei Verfahren eingesetzt, wobei in beiden Verfahren die Gewichte der Verbindungen mit Zufallswerten initialisiert werden:

- maximales Skalarprodukt,
- minimaler euklidischer Abstand.

Maximales Skalarprodukt

Für jedes Neuron der Karten-Schicht wird das Skalarprodukt aus dem Vektor der Verbindungsgewichte zur Eingabe-Schicht und dem Eingabevektor (Ausgabe der Eingabe-Neuronen) gebildet und aus dieser Menge wird das Maximum bestimmt.

$$\sum_i o_i \cdot w_{iz} = \max_j \sum_i o_i \cdot w_{ij}$$

Das Neuron z hat von allen Neuronen die maximale Netzeingabe.

Minimaler euklidischer Abstand

Hierbei gilt für das Gewinner-Neuron z, dass der Gewichtsvektor der Verbindungen von den Eingabe-Neuronen zum Neuron z, dem Eingabevektor m_p im Sinne der euklidischen Norm am ähnlichsten ist.

$$||m_p - W_z|| = \min_j ||m_p - W_j||$$

Das entspricht im Einzelnen der Formel:

$$\sum_i (m_{pi} - w_{iz})^2 = \min_j \sum_i (m_{pi} - w_{ij})^2$$

Die euklidische Norm ist für viele Anwendungen plausibler. Das Gewinner-Neuron z ist dann am „dichtesten“ an der Eingabe. Der Gewichtsvektor, gebildet aus den Verbindungsgewichten von der Eingabe zum Neuron z, ist dem Eingabemuster $m_p = (m_{p1}, m_{p2}, \ldots, m_{pk})$, repräsentiert durch die Ausgabe o_i der Eingabe-Neuronen, am ähnlichsten. Das Minimum der Differenz, die minimale Abweichung wird gesucht.

Nachdem das Gewinner-Neuron, das Erregungszentrum bestimmt wurde, werden im Trainingsprozess die Gewichte zur Eingabe und zu den benachbarten Neuronen modifiziert. Die räumliche Nähe beeinflusst auch den Grad der Gewichtsanpassung.

Die Gewichte der Verbindungen werden derart modifiziert, dass das Erregungszentrum für das anliegende Muster „deutlicher als zuvor“ zutage tritt. Dazu werden die Gewichte der Verbindungen zu den benachbarten Neuronen erhöht, Verbindungsgewichte zu weiter entfernten Neuronen verringert oder nicht mehr verändert.

Ursprünglich ging man davon aus, dass Neuronen, die außerhalb der Nachbarschaft liegen, sogar „abgestoßen“ werden. Die Kurve, die den Grad der Beeinflussung der Gewichtsveränderung widerspiegelt, wird **Mexican-Hat-Funktion** genannt (Bild 7.4).

In der Praxis kann jedoch auf die Abstoßung verzichtet werden. In der Literatur wird sogar berichtet, dass Gewichtsänderungen, die eine Abstoßung zum Erregungszentrum erzielen, zum Divergieren des Netzes führen können.

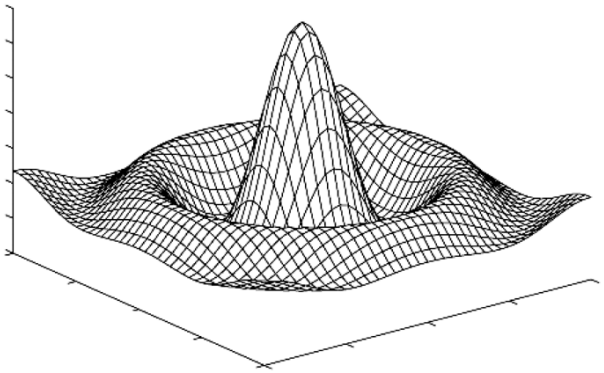


Bild 7.4 Mexican-Hat-Funktion

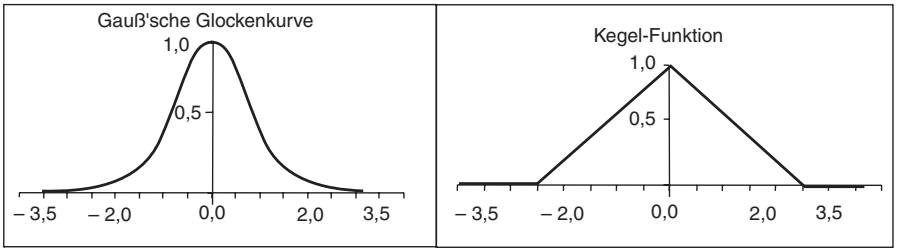


Bild 7.5 Gauß'sche Glockenkurve und Kegel-Funktion

Der Grad der Beeinflussung der Nachbarschaft lässt sich effektiv mittels der aus der Statistik bekannten Gauß'schen Glockenkurve oder mittels einer Kegel-Funktion (Bild 7.5) berechnen.

Die Gewichtsänderung erfolgt nur für die Neuronen, die innerhalb eines gewissen Radius r des Gewinner-Neurons z liegen.

$$w'_{ij} = \begin{cases} w_{ij} + \lambda \cdot h_{jz} \cdot (m_i - w_{ij}) & \text{falls } dist(j,z) \leq r \\ w_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$$

Mittels des Lernfaktors λ kann die Stärke der Modifikation gesteuert werden. Im Faktor h wird der Einfluss des Abstands des Neurons j vom Erregungszentrum z mittels der Gauß'schen Glockenkurve ausgedrückt.

$$h_{jz} = e^{\frac{\text{dist}(j,z)^2}{2 \cdot r^2}}$$

Dabei ist $dist(j,z)$ der Abstand des Neurons j vom Gewinner-Neuron z. Der Radius r steuert die Form der Glockenkurve. Für große r ist die Kurve flach und breit und es werden auch weiter entfernt liegende Neuronen beeinflusst. Kleine Werte für r erzeugen eine spitze, steile Kurve und nur die unmittelbare Nachbarschaft erfährt noch eine Veränderung.

Aus dem Einfluss des Parameters r auf den Faktor h kann leicht die Veränderung des Radius r während der Lernphase motiviert werden. Man beginnt mit großen Werten für den Radius, so dass alle Neuronen der Kohonen-Karte innerhalb der Nachbarschaft eines möglichen Gewinner-Neurons liegen und einer Anpassung unterworfen werden. Während der Lernphase wird der Radius verkleinert. Damit verringern sich die räumlichen Auswirkungen einer

Gewichtsveränderung. Nach der groben Orientierung in der ersten Phase werden Schritt für Schritt die Feinabstimmungen vorgenommen.

Analog wird mit dem Lernfaktor verfahren. Man beginnt mit einem relativ hohen Wert λ, der im Zuge des Trainings verringert wird. Nach einer „kräftigen“ Modifikation am Beginn wird mehr und mehr auf die feine Abstimmung der Gewichte eingeschwenkt. Somit erfolgt das Lernen in einer SOM gemäß dem Algorithmus im Listing 7.2. Als Faktoren dec_r, dec_λ für die Verringerung des Radius r und des Lernfaktors λ werden typischer Weise Werte nahe 1.0 gewählt:

$$0.99 < dec_r < 1.0 \quad \text{sowie} \quad 0.99 < dec_\lambda < 1.0$$

Somit berechnet sich der Lernfaktor im Lernschritt $t+1$ aus dem Lernfaktor im Lernschritt t:

$$\lambda(t+1) = dec_\lambda(t) \cdot \lambda(t)$$

Der Radius $r(t+1)$ wird auf analoge Weise bestimmt.

Listing 7.2 Lernalgorithmus einer SOM

```
PROCEDURE Kohonen-Lernen
  Initialisiere alle Gewichte
  REPEAT
    Wähle zufällig ein Muster m aus
    Bestimme Gewinner-Neuron z für Muster m
    FOR alle Neuronen j der Karten-Schicht DO
      IF dist(j,z) ≤ r THEN
        h_jz := exp(-dist(j,z)^2/(2·r^2))
        w_ij := w_ij + λ · h_jz · (m_i - w_ij)
      END IF
    END FOR
    Verkleinere Lernfaktor λ und Radius r
  UNTIL λ=0 ∨ r=0 ∨ Anzahl Iterationen erreicht
END Kohonen-Lernen
```

Ein sehr anschauliches, wenn auch stark konstruiertes Beispiel wurde bereits von Kruse ANfang der 90er-Jahre vorgestellt [Kru91] zu finden. Anhand von binarisierten Tiermerkmalen werden Tiere unterschieden. Interessanter als das jeweilige Erregungszentrum ist die Verteilung aller Erregungszentren, die im Laufe des Lernens entsteht. Ähnliche Tiere werden meist auf benachbarte Gebiete der SOM abgebildet.

Das Bild des Tierbeispiels ergibt sich, indem man für jeden Datensatz an der Position des zugehörigen Gewinner-Neurons innerhalb der Karten-Schicht den Namen des Datensatzes, hier den Tiernamen, platziert (Bild 7.6 auf der nächsten Seite).

7.1.3 Visualisierung einer Karte und deren Verhalten

Für die anschauliche Darstellung des Verhaltens einer SOM gibt es mehrere Möglichkeiten:

- In einer dreidimensionalen Darstellung werden über der aus den Karten-Neuronen gebildeten Ebene die Aktivierungen der Neuronen als Höhenpunkte dargestellt. Im Ergebnis stellt sich ein Zustand einer SOM als Gebirge dar. Der „Berg“ steht an der Stelle des Gewinner-Neurons.

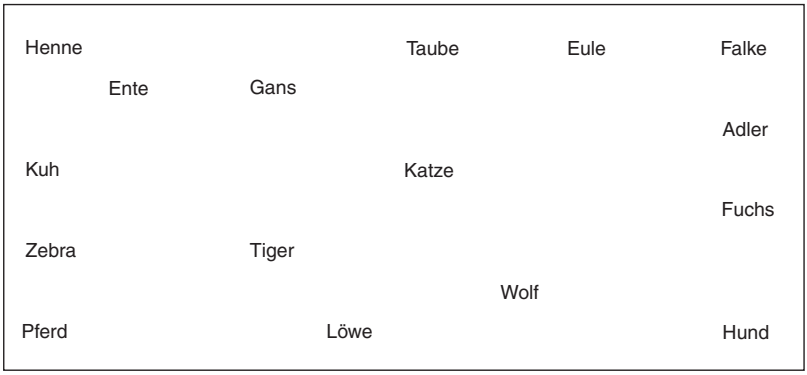


Bild 7.6 Verteilung der Erregungszentren für Tierdaten

- In einer zweidimensionalen Darstellung wird die Aktivierung der Neuronen farblich abgestuft. Je nach verwendeter Farbskala hebt sich das Erregungszentrum deutlich ab.
- Für den speziellen Fall zweidimensionaler Eingaben kann ein Karten-Neuron als Punkt in der Ebene dargestellt werden. Zieht man dazu Linien zu den benachbarten Neuronen ergibt sich ein Gitternetz.

Auf den Fall einer zweidimensionalen Eingabe gehen wir hier etwas genauer ein. In einem Netz mit genau zwei Eingabe-Neuronen, können deren Aktivierungen als xy-Koordinate interpretiert und somit die Eingaben als Punkte in der Ebene visualisiert werden.

Jedes Neuron der Karten-Schicht besitzt zwei gewichtete Verbindungen zur Eingabeschicht, hier den beiden Eingabe-Neuronen. Dieses Wertepaar der Gewichte der Verbindungen zu den Eingabe-Neuronen wird wiederum als xy-Koordinate interpretiert. Damit kann auch jedes Karten-Neuron als Punkt in der Ebene visualisiert werden.

Der Abstand zwischen Eingabe und Erregungszentrum kann grafisch als Abstand der beiden Punkte in der Ebene deutlich gemacht werden. Der einzelne Punkt rechts oben im Bild 7.7 ist die aktuelle Eingabe, der Punkt rechts oben im Gitternetz das aktuelle Gewinner-Neuron. Wählt man als Eingabemuster zufällige Punkte aus einem ebenen Bereich aus, so kann verfolgt werden, wie sich die Karte entfaltet. Nach entsprechend vielen Lernschritten sind die Punkte, d. h. die Neuronen, so über dem Eingaberaum verteilt, dass das Gitter diesen Raum gleichmäßig ausfüllt.

7.1.4 Eine Lösung des Rundreiseproblems

Neben der klassischen Anwendung der selbstorganisierenden Karten für die Klassifizierung von Daten hat sich eine auf den ersten Blick exotische Einsatzmöglichkeit ergeben:

Eine SOM kann zur Lösung des aus dem **Operations Research** bekannten und im Abschnitt 3.4 diskutierten Rundreiseproblems eingesetzt werden:

Gegeben ist eine feste Anzahl von Orten, die während einer Rundreise alle einmal besucht werden müssen. Nachdem alle Orte erreicht wurden, muss zum Anfangsort der Reise zurückgekehrt werden. Gesucht ist nun die kürzeste Rundreise.

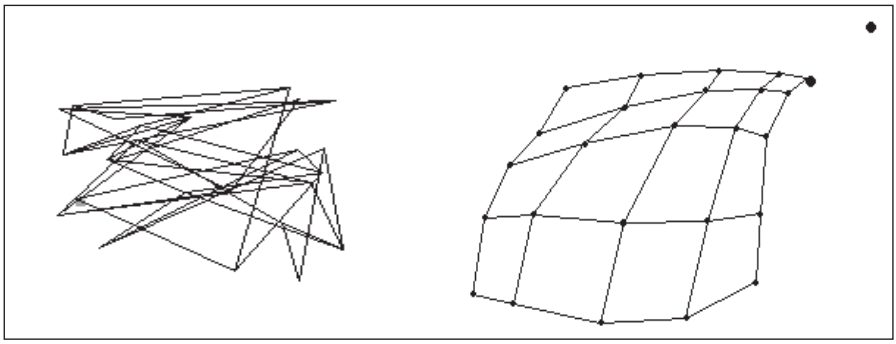


Bild 7.7 SOM mit 5x5-Neuronen im Ausgangszustand und nach 200 Lernschritten

Im Abschnitt 3.4 werden verschiedene Suchstrategien für die Lösung dieses exponentiell aufwendigen Problems vorgestellt. Insbesondere wird dort motiviert, dass die optimale Rundreise durch die sechs Städte des Bundeslandes Mecklenburg-Vorpommern noch ohne Probleme gefunden werden kann. Die Bestimmung der optimalen Tour durch 12 Städte des Landes ist noch realistisch, eine Reise durch 18 Städte (Bild 7.8) ist dagegen durch Ausprobieren aller möglicher Routen nicht mehr in einer vernünftigen Zeit lösbar.

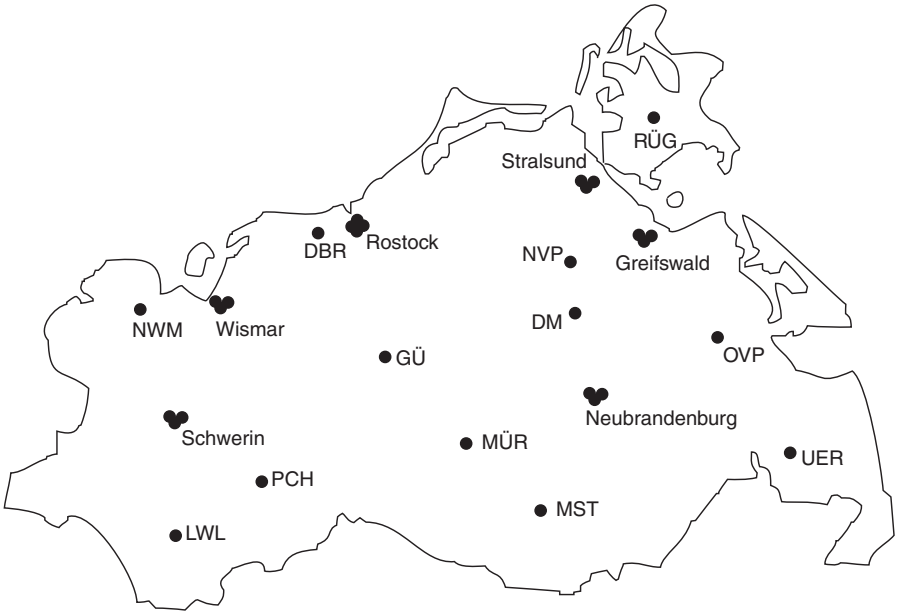


Bild 7.8 18 Städte in Mecklenburg-Vorpommern (MVP)

Im Gegensatz zum Einsatz unterschiedlich intelligenter Suchverfahren wird hier der Einsatz einer selbstorganisierenden Karte zur Bestimmung einer zumindest suboptimalen Lösung vorgestellt. Als Netzeingabe fungieren die Koordinaten der zu besuchenden Orte.

Jedes Neuron der Karten-Schicht besitzt somit zwei Verbindungen zur Eingabeschicht, eine Verbindung zum Neuron der x-Koordinate und eine Verbindung zur y-Koordinate des Ortes.

Die Gewichte dieser Verbindungen können nun als xy-Koordinaten des Neurons interpretiert werden.

Mit dieser Interpretation der Verbindungsgewichte ergibt sich leicht eine grafische Darstellung der Neuronen der Karten-Schicht. Man geht davon aus, dass die Neuronen der Kohonen-Karte nummeriert sind. Anhand dieser Nummerierung werden das Vorgänger-Neuron sowie das Nachfolger-Neuron bestimmt. Stellt man die Neuronen der Karte wie erläutert grafisch dar und verbindet man jedes Neuron mit seinem Nachfolger, so ergibt sich eine „Rundreise“ durch alle Neuronen der Karte.

Diese Kurve stellt natürlich noch in keiner Weise eine optimale Variante dar. Würde man die bei SOM übliche Initialisierung der Verbindungen mit zufälligen Gewichten wählen, ergäbe sich auch eine willkürliche und wenig sinnvolle Rundreise (Bild 7.9).

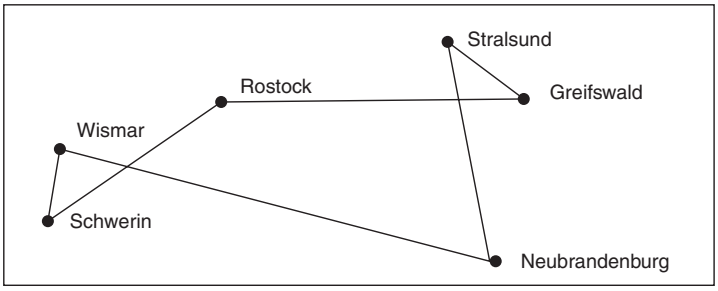


Bild 7.9 Zufällige Rundreise durch sechs Städte aus MVP

Man geht stattdessen von einer idealen Kurve aus. Ideal wäre es, wenn alle Orte auf einem Kreis mit einem möglichst kleinen Radius liegen würden. Auch wenn das in der Praxis nicht vorkommt, werden die Neuronen der Kohonen-Karte entsprechend initialisiert. Die Ausgangssituation mit der erläuterten grafischen Darstellung zeigt das Bild 7.10.

Anfangs liegen alle Neuronen auf dem idealen Kreis. Das Lernverfahren funktioniert wie üblich. Die Koordinaten eines zu besuchenden Ortes werden angelegt. Das Neuron, welches den geringsten Abstand zum Eingabe-Neuron aufweist, ist das Gewinner-Neuron. Nun werden die Gewichte der Verbindungen zu diesem Neuron modifiziert. Die Gewichte der Verbindungen zu den Eingabe-Neuronen, die xy-Koordinaten des Neurons, werden so geändert, dass sich der Abstand zwischen Eingabeort und Neuron-Ort verringert. Das Gewinner-Neuron „nähert“ sich dem Eingabeort.

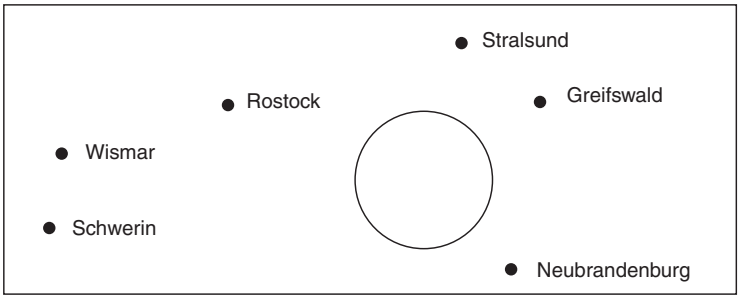


Bild 7.10 Anfangszustand: Neuronen bilden einen Kreis

Nach einer Reihe von Durchläufen existiert für jeden Ort ein Neuron der Kohonen-Karte, welches (fast) dieselben Koordinaten wie der Eingabe-Ort aufweist.

Ein Durchlauf durch alle Neuronen in der nummerierten Reihenfolge berührt dann auch alle Eingabe-Orte und stellt somit eine gültige Rundreise durch alle Orte dar. Grafisch lässt sich die Lösung dann sofort ablesen.

Für eine exakte Lösung ist nach dem Training in einem Durchlauf für jeden Ort das Gewinner-Neuron zu bestimmen. Sortiert man nun diese Paare aus Stadt und Gewinner-Neuron nach der Nummer der Neuronen, so erhält man für die zugeordneten Städte eine Lösung des Rundreiseproblems.

Auch wenn dieser letzte Schritt durchaus einigen Aufwand erfordert, steht dieser jedoch in keinem Verhältnis zum exponentiellen Verhalten einer vollständigen Suche. Mittels einer SOM kann innerhalb von Sekunden eine Rundreise durch mehrere hundert Orte bestimmt werden. Die Karte zur Bestimmung einer Rundreise durch 150 Orte im Bild 7.12 besteht aus 750 Neuronen und wurde innerhalb weniger Sekunden in 1900 Schritten trainiert. Aus den Bildern 7.11 und 7.12 auf der nächsten Seite ist ersichtlich, dass die gefundenen Lösungen recht plausibel sind. Allerdings kann nicht davon ausgegangen werden, dass stets die optimale Lösung erzielt wird.

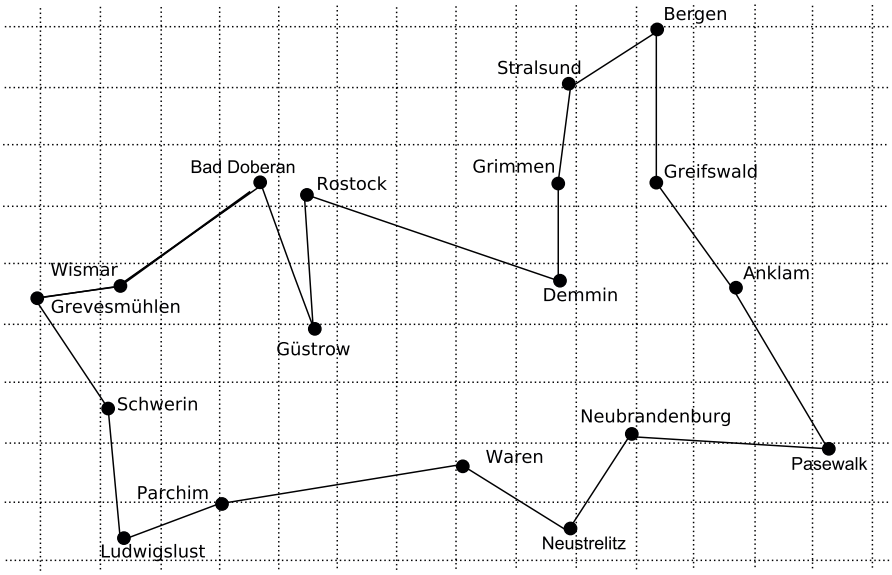


Bild 7.11 Rundreise durch 18 Städte aus MVP

Die Webseiten zum Buch enthalten die von Studenten entwickelte Software TSP. Mit ihr können verschiedene Algorithmen, darunter auch eine SOM, zur Bestimmung einer Rundreise getestet werden. Das Ergebnis im Bild 7.11 ist so entstanden.

Abschließend sei auf die Grenzen dieser Vorgehensweise hingewiesen: Das Verfahren ist nur anwendbar, wenn der Aufwand einer „Fahrt“ von einem Ort zum nächsten Ort direkt der geometrischen Entfernung der Orte entspricht. Es muss stets gelten:

$$w_{A,B} = w_{B,A} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

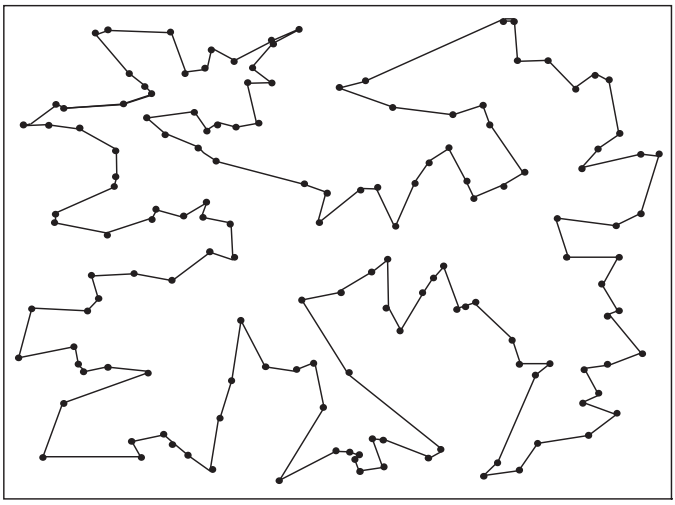


Bild 7.12 Eine Rundreise durch 150 Orte

Bei einem allgemeinen Rundreiseproblem wird der Aufwand der Reise von einem Ort A zu einem Ort B als Wert in einer Kostenmatrix vorgegeben. In einer solchen Matrix ist $w_{A,B}$ nicht notwendigerweise gleich $w_{B,A}$. So können auch nicht gewollte Routen durch Angabe sehr hoher Kostenwerte von vornherein ausgeschlossen werden. Derartige Randbedingungen können bei der Anwendung einer SOM nicht berücksichtigt werden. Dies ist beispielsweise mit autoassoziativen Netzen möglich. Allerdings werden aus anderen Gründen nicht immer Ergebnisse in gewünschter Qualität erreicht. Autoassoziative Netze werden im Kapitel 8 behandelt.

Übung 7.1 Architektur einer SOM

Erläutern Sie die Architektur einer selbstorganisierenden Karte.

Übung 7.2 Winner takes all

Was versteht man unter dem „winner-takes-all"-Verfahren?

Übung 7.3 Gewichte 1

Warum ist die Initialisierung der Gewichte mit zufälligen Werten notwendig?

Übung 7.4 Gewichte 2

Wie erfolgt die Anpassung der Gewichte einer SOM?

Übung 7.5 Visualisierung

Auf welche Art und Weise können selbstorganisierende Karten visualisiert werden?

Übung 7.6 Rundreiseproblem

Wie kann das Rundreiseproblem mittels einer SOM gelöst werden und welche Randbedingungen gibt es?

Übung 7.7 Prognose

Kann eine selbstorganisierende Karte zur Vorhersage von Börsenwerten verwendet werden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Übung 7.8 Tierdaten

Klassifizieren Sie Tierdaten mit einer SOM. Erstellen Sie eine geeignete Codierung für die Eigenschaften der Tiere. Nutzen Sie den JavaNNS für die Arbeit mit der Karte.

Übung 7.9 Programmieren

Implementieren Sie eine Karte mit einer Eingabeschicht aus zwei Neuronen in einer Programmiersprache Ihrer Wahl und visualisieren Sie das Verhalten der Karte.

Übung 7.10 Rundreiseproblem

Lösen Sie das Rundreiseproblem für eine Rundreise durch alle Kreisstädte und kreisfreien Städte Ihres Bundeslandes.

Übung 7.11 Selbstorganisierende Karten in der Praxis

Stellen Sie Anwendungen selbstorganisierender Karten zusammen.

7.2 Neuronales Gas

Die Architektur eines neuronalen Gases ist sehr einfach, besteht es doch im engeren Sinne nur aus einer Menge von Neuronen. Eine extra Eingabeschicht wird nur modelliert, um das Eingabemuster bereitzustellen, Bild 7.13.

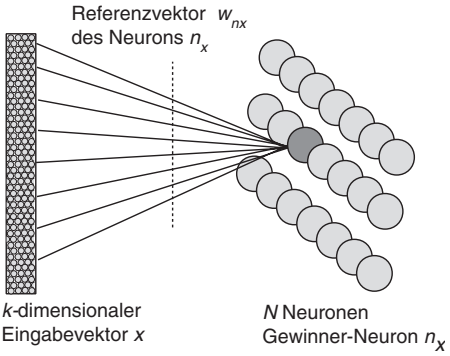


Bild 7.13 Neuronales Gas

7.2.1 Architektur und Arbeitsweise

Ein neuronales Gas ist im engeren Sinne gar kein Netz mehr, da die Neuronen nur Verbindungen zu den Eingabe-Neuronen besitzen. Die Neuronen sind untereinander nicht verbunden. Daher der Name: Wie die Teilchen in einem Gas besitzen auch die Neuronen hier wenig Wechselwirkungen untereinander.

Ein neuronales Gas benutzt ein weiches Wettbewerbslernen zum Anpassen der Gewichte. Ähnlich wie in einer selbstorganisierenden Karte wird am Anfang sowohl von einem hohen Wert für den Lernparameter λ als auch von einer hohen Nachbarschaftsweite ϵ ausgegangen. Der Lernparameter bestimmt wesentlich den Grad der Veränderung eines Gewichtes. Die Nachbarschaftsweite legt fest, welche Neuronen beziehungsweise welche Verbindungsgewichte aufgrund eines Trainingsmusters angepasst werden.

Häufig werden für die Demonstration zweidimensionale Eingaben betrachtet, die über ein bestimmtes Gebiet in der Ebene gleich verteilt sind. Die Demonstrationssoftware, siehe [Fri17], visualisiert die Eingaben als auch die Neuronen als Punkte in der Ebene und im Raum. Der Anpassungsprozess ist damit anschaulich nachvollziehbar.

Wie die Experimente mit Demo-Software DemoGNG [LooFri98] zeigen, werden einige Tausend Lernschritte benötigt, bis das gewünschte Ergebnis erzielt wird. Aufgrund des hohen Abstandswertes ϵ zu Beginn, werden am Anfang alle Neuronen beeinflusst und wandern so dem jeweiligen Eingabesignal hinterher.

Listing 7.3 Algorithmus der Anpassung eines neuronalen Gases

```
PROCEDURE NeuroGas
  Initialisiere alle Neuronen der Gas-Schicht n_i,1 ≤ i ≤ N
  Initialisiere alle Verbindungen w_i mit zufälligen Gewichten
    w_i ist der Vektor der Verbindungsgewichte von den
        Eingabe-Neuronen zum Neuron i
  Initialisiere Lernparameter λ_0, λ_tmax wobei gilt: λ_0 > λ_tmax
    sowie Parameter zur Bestimmung der Nachbarschaftsweite ε_0
    und ε_tmax mit derselben Bedingung: ε_0 > ε_tmax
  FOR t := 0 TO tmax DO
    Eingabe-Neuronen erhalten ein Eingabesignal x_i,1 ≤ i ≤ dim_X
    FOR j:=1 TO N DO
      dist_j = ||X - w_nj||     Abstand des Neurons j zur Eingabe X
    END FOR
    Sortiere die Neuronen j zu einer Folge f_1,f_2,...,f_N so,
      dass die zugehörigen Distanzen aufsteigend sortiert sind:
      dist_f1 ≤ dist_f2 ≤ ... ≤ dist_fN
    Verändere die Gewichtsvektoren w_fk wie folgt:
      w_fk = λ_t · h(t,k) · (X - w_fk) für k = 1..N;
        Dabei berechnen sich die Komponenten gemäß Gleichung 7.1.
  END FOR
END NeuroGas
```

$$\lambda_t = \lambda_0 \cdot \left(\frac{\lambda_{\text{tmax}}}{\lambda_0}\right)^{\frac{t}{\text{tmax}}} \qquad \epsilon_t = \epsilon_0 \cdot \left(\frac{\epsilon_{\text{tmax}}}{\epsilon_0}\right)^{\frac{t}{\text{tmax}}} \qquad h(t,k) = e^{\left(\frac{1-k}{\epsilon_t}\right)} \tag{7.1}$$

Im Teilbild (Bild 7.14) rechts unten ist die so genannte Voronoi-Tesselation eingezeichnet. Diese Aufteilung des Eingabegebietes zeigt für jedes Neuron auf, für welche Vektoren aus dem Ein-

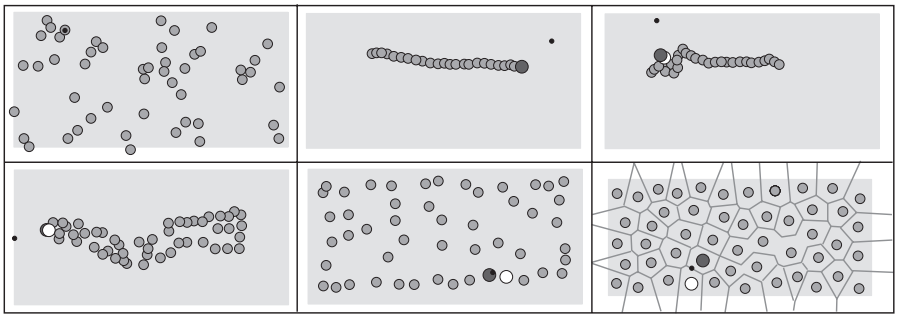


Bild 7.14 Verteilung der Neuronen im Verlaufe der Lernphase, erzeugt mittels [Fri17]: Initialer Zustand, Zustand nach 200, 1.000, 5.000, 14.000 sowie 28.000 Schritten

gaberaum dieses Neuron das Gewinner-Neuron ist. Alle Punkte einer solchen Kachel-Fläche werden somit auf das Neuron im Innern dieser Fläche abgebildet.

Definition 7.3 Voronoi-Gebiet

Das Voronoi-Gebiet G_i eines Neurons i mit dem Referenzvektor w_i umfasst die Menge aller Punkte p_j, für die w_i der „nächste“ Vektor ist:

Es gibt somit kein $p \in G_i$ und kein k, so dass gilt: $||x_p - w_i|| > ||x_p - w_k||$.

Mit der Voronoi-Kachelung ist ein spezieller Graph unmittelbar verbunden, die Delaunay-Triangulation.

Definition 7.4 Delaunay-Triangulation

Verbindet man diejenigen Neuronen miteinander, deren zugehörige Voronoi-Gebiete eine gemeinsame Kante aufweisen, so entsteht die Delaunay-Triangulation.

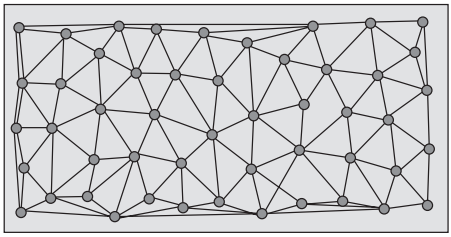


Bild 7.15 Delaunay-Triangulation der Neuronen eines neuronalen Gases (erzeugt mittels [Fri17])

7.2.2 Wachsendes neuronales Gas

Für viele Anwendungen von neuronalen Netzen besteht ein Problem darin, die geeignete Anzahl von Neuronen zu finden. Zu viele Neuronen begünstigen das sogenannte **Overfitting**. Das neuronale Netz ist zu stark trainiert und verliert dabei seine **Generalisierungsfähigkeit**.

Ein Netz mit sehr wenigen Neuronen wird die geforderte Aufgabe nicht erfüllen können. Kennzeichnend dafür ist, dass der Netzfehler sich nicht verringern lässt.

Eine Idee geht nun davon aus, mit sehr wenigen Neuronen zu beginnen [Fri17]. Entsprechend der Aufgabenstellung und deren Erfüllung werden nach und nach weitere Neuronen hinzugefügt, bis ein gewünschtes Verhalten erreicht wird.

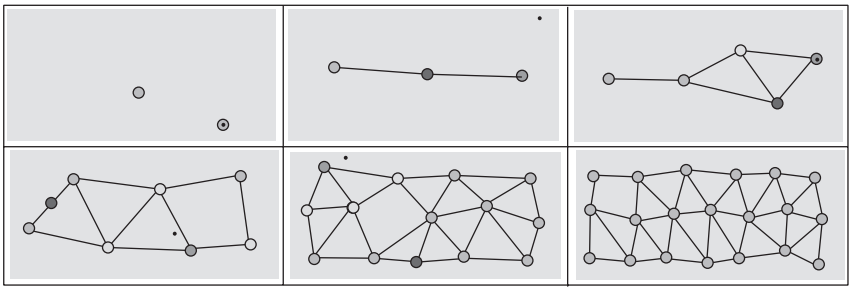


Bild 7.16 Ausschnitte aus dem Wachstumsprozess des neuronalen Gases, das bis auf maximal 20 Neuronen anwächst (mittels DemoGNG erzeugt)

Die Vorgehensweise kann wiederum sehr anschaulich mittels der Demonstrationssoftware von Fritzke [Fri17] nachvollzogen werden. Zum besseren Verständnis verlangsamt man die Simulation. Das Einschalten der Anzeige für die Eingabesignale und die Markierungen der vom Lernschritt betroffenen Neuronen erhöht die Anschaulichkeit ebenso.

Entsprechend der gewählten maximalen Zahl von Neuronen und einer Eingabemenge passt sich die Menge der Referenzvektoren der Neuronen so an, dass eine „gleichmäßige“ Verteilung der Neuronen über dem Eingaberaum entsteht.

Im zweidimensionalen Fall und einer Gleichverteilung der Eingabesignale über einer Fläche, wird sich das neuronale Gas so verteilen, dass eine gleichmäßige Aufteilung der Fläche erfolgt. Diese ist anhand der Voronoi-Tesselation besonders anschaulich.

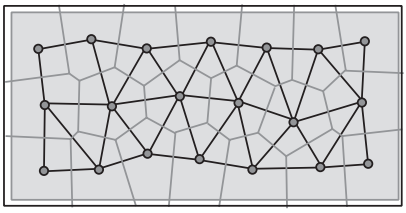


Bild 7.17 Aufteilung der Eingabefläche, angezeigt durch die Voronoi-Tesselation

Das Hinzufügen eines weiteren Neurons erfolgt nicht zufällig. Stattdessen wird ein neues Neuron zwischen dem „schlechtesten“ Neuron und dem „schlechtesten“ Nachbarn dieses Verlierers platziert.

Listing 7.4 Algorithmus zum Einsetzen eines neuen Neurons

```
PROCEDURE ErzeugeNeuron
  Bestimme das "schlechteste" Neuron q,
    das Neuron mit dem größten akkumulierten Fehler
  Bestimme den "schlechtesten" Nachbarn p von q
  Erzeuge neues Neuron r und
    initialisiere den Referenzvektor: wr := 1/2·(w_q + w_p)
  Erzeuge Kante (r,p) und (r,q); Entferne Kante (p,q)
  Aktualisiere die lokalen Fehlerwerte: E_q := (1−α)·E_q;  E_p := (1−α)·E_p
  Setze den Fehlerwert des neuen Neurons r: E_r := 1/2·(E_q + E_p)
  FORALL Neuron i DO E_i := (1−β)·E_i
END ErzeugeNeuron
```

Als lokaler Fehlerwert der neuen Einheit wird ein Mittel aus den beteiligten „alten“ Neuronen-Fehlerwerten unter Beachtung einer kleinen angenommenen Verbesserung α gewählt.

Gleichzeitig wird die Verbindung zwischen den beiden „alten“ Neuronen entfernt und durch je eine Verbindung zum neu hinzugefügten Neuron ersetzt. Nach einer vorher definierten Zahl von Lernschritten wird dann das nächste Neuron eingefügt.

Die Lebensdauer einer Verbindung wird grundsätzlich begrenzt. Entstehen durch die Entfernung vorhandener Kanten Neuronen ohne Verbindung, so wird dieses Neuron ebenfalls entfernt.

Listing 7.5 Algorithmus zur Anpassung eines wachsenden neuronalen Gases an einen Eingaberaum

```
PROCEDURE GrowingNeuralGas
  Initialisiere die Gas-Schicht mit zwei Neuronen n_1 und n_2
  Initialisiere die Referenzvektoren w_1 und w_2 (zufällig)
  Initialisiere die Menge der Verbindungen als leere Menge
  ende := FALSE;
  schritt := 0;
  WHILE NOT ende DO
    schritt++;
    Eingabe-Neuronen erhalten ein Eingabesignal x: x_i, 1 ≤ i ≤ dimX
    Ermittle das Sieger-Neuron s_1
    Ermittle den Zweitplatzierten s_2
    IF NOT Verbindung(s_1,s_2) THEN Erzeuge Verbindung(s_1,s_2)
    Verbindung(s_1,s_2).alter := 0
    Aktualisiere den lokalen Fehlerwert: ΔEs_1 := ||x − ws_1||^2
    Aktualisiere die Referenzvektoren von s_1: Δws_1 := λ·(x − ws_1)
    FORALL Nachbar i von s_1 DO
      Adaption der Gewichte der Nachbarn:  Δwi := λ·(x − w_i)
      Erhöhe das Alter der Kanten von s_1 zum Nachbarn i:
          Verbindung(s_1,i).alter ++
    FORALL Verbindung(i,j) DO
      IF verbindung(i,j).alter>maxa THEN Entferne Verbindung(i,j)
    FORALL Neuron i DO
      IF Neuron i.anzahlVerbindungen = 0 THEN Entferne Neuron i
    IF (schritt MOD lambda)=0 THEN ErzeugeNeuron
    ende:= Haltekriterium ist erfüllt
  END WHILE
END GrowingNeuralGas
```

Die Kanten werden hierbei nicht im üblichen Sinne neuronaler Netze gesehen. Sie besitzen weder Gewichte noch werden sie in irgendeiner Weise zur Bestimmung einer Neuronenaktivität herangezogen. Jede Kante, die gemäß dem obigen Algorithmus erzeugt wird, ist Bestandteil der so genannten Delaunay-Triangulation. Sie werden benutzt, um die Ähnlichkeitsbeziehungen besser ermitteln zu können.

Übung 7.12 Wettbewerbslernen

Was versteht man unter Wettbewerbslernen? Wodurch unterscheiden sich die beiden genannten Formen?

Übung 7.13 Neuronales Gas

Geben Sie den Aufbau eines neuronalen Gases wider.

Übung 7.14 Gewinner-Neuron

Wodurch unterscheidet sich die Bestimmung des Gewinner-Neurons in einer selbstorganisierenden Karte von dem Vorgehen in einem neuronalen Gas?

Übung 7.15 Training

Wie wird ein neuronales Gas trainiert?

Übung 7.16 Wachsendes Gas

Wie funktioniert der Wachstumsprozess in einem wachsenden neuronalen Gas?

Übung 7.17 Anwendung

Was ist das Ziel bei der Anwendung von neuronalen Gasen?

Übung 7.18 Demo-Software

Spielen Sie-mit dem DemoGNG-System die hier-gezeigten Beispiele nach. Das erste Beispiel ist ein einfaches neuronales Gas mit 50 Neuronen und einem Rechteck als Eingabefläche. Das zweite Beispiel benutzt dieselbe Fläche, ist ein wachsendes neuronales Netz mit maximal 20 Neuronen.

Übung 7.19 Ein Vergleich

Vergleichen Sie das Verhalten eines wachsenden neuronalen Netzes mit einer selbstorganisierenden Karte (bei gleicher Neuronenzahl und gleicher Eingabefläche). Beurteilen Sie die Ergebnisse nach 10.000, 20.000 sowie 40.000 Lernschritten.

Übung 7.20 Anwendungen neuronaler Gase

Stellen Sie mittels einer Literatur- sowie Internet-Recherche Anwendungen neuronaler Gase zusammen. Betrachten Sie die Anwendungen kritisch und versuchen Sie alternative Netzarchitekturen vorzuschlagen.

7.3 Adaptive Resonanz-Theorie

7.3.1 Das Plastizitäts-Stabilitäts-Dilemma

Eine große Herausforderung für Systeme, die ein intelligentes Verhalten zeigen sollen, ist das selbstständige, autonome Reagieren auf bis dato unbekannte Situationen. Alle bisher betrachteten Netze können so entwickelt beziehungsweise trainiert werden, dass sie in der Lage sind, auf neue, unbekannte Eingaben zu reagieren. Allerdings ist die mögliche Reaktion auf die vorher antrainierten Reaktionen beschränkt. Die Adaptive Resonanz-Theorie (ART) kann für eine Klassenbildung (Clusterung) als auch für die Klassifikation eingesetzt werden. Für die Ermittlung eines Neurons als Vertreter einer Klasse von Eingabedaten kommt eine Form des Wettbewerbslernens zur Anwendung.

Beispiel 7.2 Ziffern-Erkennung

Nehmen wir an, ein vorwärts gerichtetes Netz sei in der Lage, die Ziffern von 0 bis 9 zu klassifizieren. Nun soll die Anwendung von Dezimalzahlen auf Hexadezimalzahlen umgestellt werden. Das Netz muss dazu auch die Buchstaben A bis F erkennen.

Ein Trainieren des Buchstabens A führt dazu, dass die bisher gelernten Ziffern nicht mehr erkannt werden. Das Netz „vergisst“ das vorher gelernte Verhalten. Eine Erweiterung der vorzunehmenden Klassifizierung kann nur durch ein komplett neues Training unter Verwendung des entsprechend neuen, erweiterten Trainingsdatensatzes der Zeichen 0 ... 9, A ... F erfolgen.

Anzustreben ist es, dass ein Netz autonom erkennt, wenn ein Muster anliegt, welches nicht den bekannten Klassen zuzuordnen ist. Dieses neue Muster sollte dann zusätzlich zu den bereits gelernten Mustern „gemerkt“ werden. Diese wünschenswerte Eigenschaft eines Netzes wird **Plastizität** genannt.

Selbstverständlich wird erwartet, dass alle vorher bekannten Muster auch weiterhin ordnungsgemäß behandelt werden. Diese Eigenschaft wird als **Stabilität** bezeichnet.

Beide Forderungen widersprechen sich: Man spricht vom **Plastitzitäts-Stabilitäts-Dilemma**. Eine Kernfrage ist, ob ein Muster tatsächlich ein neues Muster, somit eine neue Klasse repräsentiert, oder ob dieses Muster ein etwas verrauschtes Exemplar aus einer bereits bekannten Klasse darstellt.

Ist das Würfel-Muster mit fünf Punkten eine verrauschte Vier oder eine neue Klasse (Bild 7.18)? Diese Frage kann nur unter Beachtung eines Maßes für die Ähnlichkeit von Mustern, einem **Ähnlichkeitsmaß** beantwortet werden.

Die **Adaptive Resonanz-Theorie (ART)** bietet einen Ansatz, das Plastizitäts-Stabilitäts-Dilemma aufzulösen. Neue Muster werden bearbeitet und in das Gedächtnis aufgenommen, ohne dass vorher gelernte Muster „vergessen“ werden. Alle Muster, deren Abstand zueinander kleiner ist als der Ähnlichkeitsparameter vorgibt, werden einer gemeinsamen Klasse zugeordnet. Dabei gibt es ein ausgezeichnetes Muster, welches als Vertreter dieser Klasse fungiert.

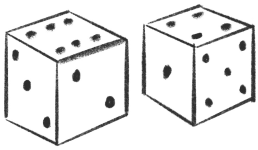


Bild 7.18 Ähnlichkeit von Würfelmustern

Zur Lösung des Ähnlichkeitsproblems wird dabei ein **Ähnlichkeitsparameter** eingeführt. Im dreidimensionalen Fall kann die von einem ART-Netz vorgenommene Klassifizierung wie im Bild 7.19 veranschaulicht werden.

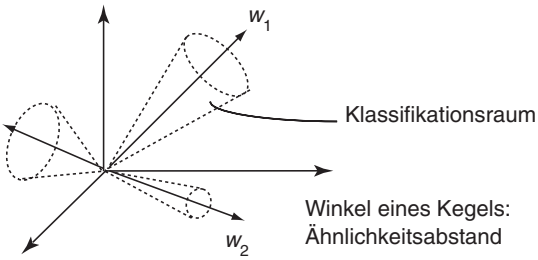


Bild 7.19 Klassifizierungen in einem ART-Netz (nach [Zel97])

Alle Punkte, die innerhalb eines Trichters liegen, sind dem Referenzvektor unter Beachtung des Ähnlichkeitsmaßes ähnlich. Sie gehören zu ein und derselben Klasse und produzieren somit dieselbe Ausgabe des Netzes. Der Radius eines Trichters im Bild 7.19 wird durch den Ähnlichkeitsparameter bestimmt.

Beispiel 7.3 Ähnlichkeit

Im folgenden Beispiel wird der Eingabevektor X mit dem Referenzvektor W einer Klasse verglichen:

$$X = (0,1,1) \quad W = (1,1,0) \quad sim = |X \wedge Y|/|X| = |(0,1,0)|/|(0,1,1)| = 0.71$$

Nimmt man einen Ähnlichkeitsparameter von 0.7 an, so werden beide Vektoren als ähnlich, als derselben Klasse zugehörig, eingestuft. Ein Parameterwert von 0.8 würde beide Muster als Vertreter unterschiedlicher Klassen einordnen.

Die Ausgabe eines ART-Netzes besteht in der Klassifizierung einer Eingabe. Die vorgenommene Klassifizierung wird durch das Gewinner-Neuron einer Erkennungsschicht deutlich.

7.3.2 Struktur eines ART-Netzes

Die Struktur und damit verbunden die Arbeitsweise eines ART-Netzes (siehe Bild 7.20) ist um einiges komplizierter als bei den bisher betrachteten Architekturen neuronaler Netze.

Bild 7.20 übernimmt die Bezeichnungen aus [Zel97] (Tabelle 7.1), wie sie auch in anderen Büchern [Sch97] aufgegriffen werden.

Kern eines ART-Netzes sind zwei Schichten von Neuronen. Die **Vergleichsschicht** F_1 (feature representation field) speichert für jede Klasse das Referenzmuster der Klasse. Die **Erkennungsschicht** F_2 (category representation field) besteht aus Neuronen, die die Erkennung einer Klasse signalisieren. Die Größe der Erkennungsschicht bestimmt die Zahl der erkennbaren Klassen.

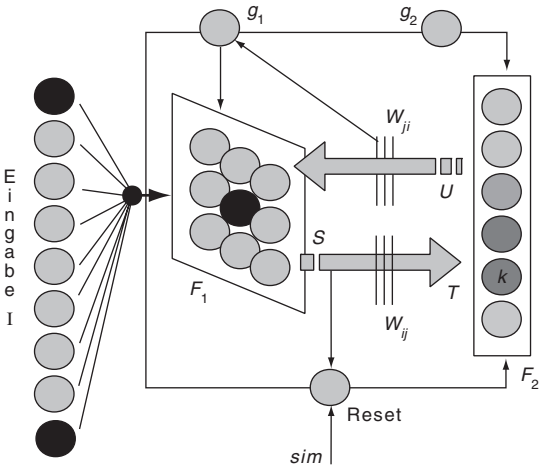


Bild 7.20 Struktur eines ART1-Netzes

Tabelle 7.1 Komponenten eines ART1-Netzes

Bez.	Bedeutung
F_1	Vergleichsschicht
F_2	Erkennungsschicht
W_{ij}	Matrix der Verbindungsgewichte von F_1 nach F_2; reellwertig
W_{ji}	Verbindungsgewichte von F_2 nach F_1; binär
S	Ergebnis der Verknüpfung der Eingabe I mit dem Vektor V und g_1 nach der 2/3-Regel
T	Ergebnis der Anwendung von S auf W_{ij}
U	binärer Vektor mit genau einer 1: $u_k = 1$, für k ist Gewinner-Neuron aus F_2
V	Verknüpfung von U mit binärer Gewichtsmatrix W_{ji}
g_1	Verstärkungsneuron (gain) für F_1-Schicht
g_2	Verstärkungsneuron für F_2-Schicht
Reset	Überwachung der Ähnlichkeit
sim	Ähnlichkeitsparameter
k	Gewinner-Neuron

Die Arbeitsweise kann grob skizziert werden, die Vorgehensweise im Einzelnen erfordert weitergehende Klärung. Wird ein Muster dem Netz angelegt, so wird die Eingabe an die Erkennungsschicht F_2 durchgereicht. Aus der Verknüpfung der Eingabe mit der Gewichtsmatrix wird

das Neuron mit der höchsten Aktivierung, das **Gewinner-Neuron** (winner takes all), in der Erkennungsschicht bestimmt. Dies ist wieder eine Anwendung des Wettbewerbslernens. Anschließend wird die Ähnlichkeit zwischen Eingabemuster I und dem der Gewinner-Neuron-Klasse zugeordneten Referenzmuster ermittelt. Dieses ist in der Vergleichsschicht F_1 gespeichert. Nun treten drei Fälle auf:

1. Ist die Eingabe dem Referenzmuster ähnlich, ist das Eingabemuster als Vertreter dieser Klasse erkannt. Das Netz hat die Klassifikation abgeschlossen.
2. Falls keine hinreichende Ähnlichkeit bestimmt werden kann, wird das zweitbeste Neuron der Erkennungsschicht nebst zugehörigem Vergleichsmuster betrachtet.
3. Lässt sich für kein Vergleichsmuster eine Ähnlichkeit mit der Eingabe entdecken, wird eine neue Klasse mit dem Eingabemuster als Referenzmuster gespeichert. Das funktioniert nur so lange, wie noch freie Neuronen aus der Erkennungsschicht zur Verfügung stehen.

Bevor wir die Arbeitsweise im Detail erläutern, wird an einem Beispiel die Vorgehensweise und Möglichkeiten eines ART-Netzes demonstriert.

7.3.3 Das Beispiel Würfelmuster

Ein neuronales Netz soll Würfelmuster erkennen. Dabei stehen zwei Ziele im Mittelpunkt der Experimente: Zum einen werden die Würfelmuster in zwei Etappen antrainiert. Nachdem das Netz die ersten vier Muster gelernt hat, wird es zu einem späteren Zeitpunkt die beiden letzten Muster hinzulernen. Zum anderen kann durch Veränderung des Ähnlichkeitsparameters die Einteilung von Mustern in Klassen gesteuert werden.

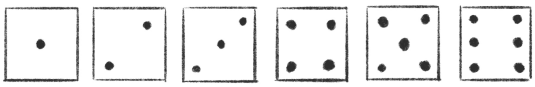


Bild 7.21 Würfelmuster als Eingabe für ein ART-Netz

Für die Durchführung der Experimente wird der JavaNNS benutzt. Das Vorgehen kann in vier Phasen unterteilt werden:

1. Aufbau des Netzes
2. Anpassung der Parameter
3. Aufbau der Musterdateien
4. Arbeit mit dem Netz

Phase: Aufbau des Netzes

Mittels des Menüpunktes BIGNET des Hauptfensters wird ein ART1-Netz aufgebaut. Die F_1-Schicht wird mit 9 Neuronen bei 3 Reihen festgelegt. Damit entsteht sowohl die Eingabeschicht als auch die Vergleichsschicht in einer quadratischen Darstellung.

Die Erkennungsschicht F_2 erhält 6 Neuronen, für jedes Würfelmuster eins. Die Anordnung in einer Spalte ist günstig und wird durch die Angabe von 6 Zeilen erreicht. Im display-Fenster ist dann das erzeugte Netz zu sehen.

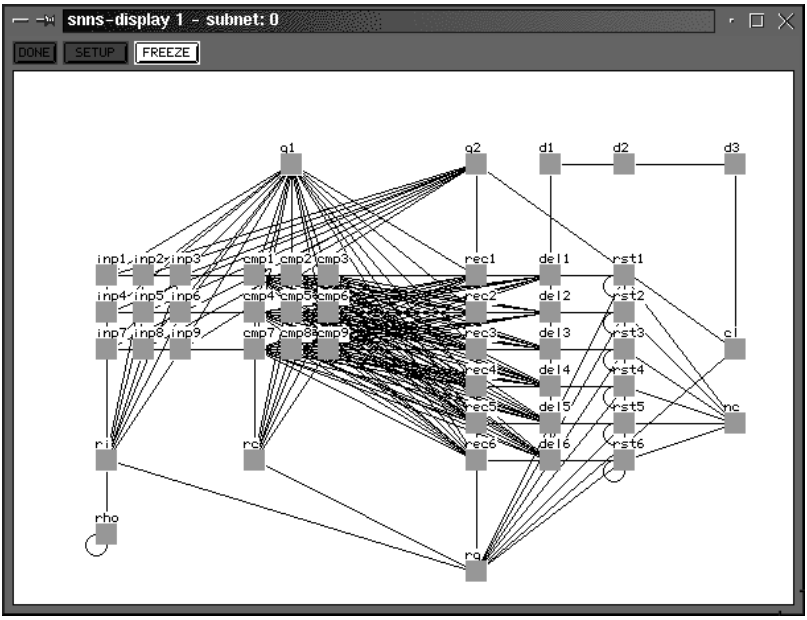


Bild 7.22 Das ART-Netz im display-Fenster des JavaNNS

Anpassungen an diese Darstellung können im SETUP vorgenommen werden. Das JavaNNS-ART1-Netz unterscheidet sich von der vorher diskutierten Struktur, da die Wirkung der ursprünglich externen Komponenten ebenfalls durch Neuronen realisiert wird.

Phase: Anpassung und Einstellungen

Eine Reihe von Anpassungen ist vorzunehmen, um ein arbeitsfähiges Netz zu erhalten. Nachdem das CONTROL-Fenster geöffnet wurde, können die Funktionen eingestellt werden. Man wähle die entsprechenden ART1-Varianten der Lernfunktion, der Propagierungsfunktion sowie der Initialisierungsfunktion aus.

Man beginne mit der ART1-STABLE-Funktion als Propagierungsfunktion. Die zwei Parameter der Initialisierungsfunktion sind beide auf 1.0 zu setzen. Details zur Wirkungsweise der Funktionen können der JavaNNS-Hilfe entnommen werden.

Die Schwellwerte der Neuronen der Eingabeschicht inp sind auf einen Wert größer 0 zu setzen, 0.9 oder 1.0.

Phase: Aufbau der Musterdateien

Für die Experimente zum Nachweis der Plastizität und Stabilität des Netzes ist es sinnvoll, mehrere Musterdateien zu erstellen. Man erstelle jeweils eine Datei mit den binären Darstellungen der Würfelmuster 1 bis 4, 5 und 6, sowie eine Datei mit allen sechs Mustern:

Listing 7.6 Muster-Datei für das ART-Würfel-Beispiel

```
SNNS pattern definition file V3.2
generated at Mon Apr 17 17:54:03 2000

No. of patterns : 6
No. of input units : 9

# Input pattern 1:
0 0 0
0 1 0
0 0 0

# Input pattern 2:
1 0 0
0 0 0
0 0 1

# Input pattern 3:
...
```

Phase: Arbeit mit dem Netz

Nachdem die Musterdatei geladen und das Netz initialisiert ist, kann mittels TEST die Reaktion des „unerfahrenen“ Netzes erlebt werden: Auf die Eingaben erfolgt keinerlei Reaktion. Kein Neuron der F_2-Schicht zeigt eine Erregung.

Nun wird das Netz trainiert. Wichtig ist die Festlegung des Ähnlichkeitsparameters, der als Parameter der Lernfunktion angegeben wird. Die Funktion ALL trainiert alle Muster. Mittels TEST kann dann die vom Netz vorgenommene Klassifizierung veranschaulicht werden. Tabelle 7.2 zeigt einige mögliche Ergebnisse.

Tabelle 7.2 Einfluss des Ähnlichkeitsparameters auf die Klassifizierung

Ähnlichkeitsparameter	Klassifizierung
0.5	3 Klassen: { {1}, {2,3}, {4, 5, 6} }
0.8	5 Klassen: { {1}, {2}, {3}, {4, 5}, {6} }
0.9	Jedes Muster wird in eigene Klasse eingeordnet.

Je dichter der Wert an 1.0 heranrückt, umso geringer fällt die tolerierte Abweichung aus. Dagegen fallen bei einem Wert nahe 0 alle Muster in ein und dieselbe Klasse.

7.3.4 Arbeitsweise

Nachdem erste Erfahrungen im Umgang mit einem ART-Netz gesammelt wurden, wird die Arbeitsweise im Einzelnen dargestellt. Es lassen sich mehrere Phasen unterscheiden:

In der **Initialisierungsphase** werden alle Gewichte der Verbindungen von der Erkennungsschicht F_2 zur Vergleichsschicht F_1 auf 1 gesetzt. Alle Verbindungen von der Vergleichsschicht F_1 zur Erkennungsschicht F_2 werden mit einem reellen Wert belegt, der unter Nutzung der Dimension der Eingabe m sowie einer Konstanten L, $L > 1$, berechnet wird. In der Literatur wird

$L = 2$ benutzt.

$$w_{ij} < \frac{L}{L-1+m}$$

Da im JavaNNS auch die algorithmischen Komponenten eines ART-Netzes mittels der Möglichkeiten neuronaler Netze modelliert werden, erfolgt eine differenzierte Belegung. Gewichte der Verbindungen von F_1 nach F_2 werden mit steigendem Index kleiner. Zur Berechnung können im control-Fenster zwei Parameter für die Initialisierungsfunktion angegeben werden. Diese können beide mit 1.0 festgelegt werden.

Der **Aufmerksamkeitsparameter** (vigilance) liegt zwischen 0 und 1 und regelt die Toleranz, die das System aufweist. Ein Wert von $sim = 0$ führt dazu, dass alle Eingaben als einander ähnlich betrachtet werden. Alle Eingaben werden in eine Klasse abgebildet. Das andere Extrem ist ein Wert von 1.0, der dafür sorgt, dass jedes Eingabemuster nur zu sich selbst ähnlich ist. Im JavaNNS wird der Aufmerksamkeits- oder Toleranzparameter als Parameter der Lernfunktion angegeben. Werte von 0.9 bis 0.99 führen für die Beispiele zu den gewünschten Ergebnissen.

In der **Erkennungsphase** wird für das anliegende Eingabe-Muster ein zugehöriges Neuron in der Erkennungsschicht ermittelt. Die Vergleichsschicht leitet in einem ersten Schritt nur die Eingabe weiter: Der Vektor S ist identisch zur Eingabe I. Im Vorfeld wird dazu vom Nullvektor als Eingabe ausgegangen $I = (0,0,\ldots,0)$, damit ist $g_2 = 0$, und auch der Vektor V ist der Nullvektor. Der Vektor S wird nach der 2/3-Regel als Erregung der Neuronen der Vergleichsschicht ermittelt.

Definition 7.5 2/3-Regel

Man spricht von der **2/3-Regel**, wenn das Ergebnis genau dann 1 ist, wenn mindestens 2 der 3 binären Eingaben 1 sind:

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= 1, \quad \text{falls } (a+b+c) \geq 2 \\ &= 0, \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

Ist nun V der Nullvektor und $g_1 = 1$, entscheidet die Eingabe I darüber, welches Neuron der F_2-Schicht aktiviert wird. S wird zur Kopie von I. Nun wird nach der **winner-takes-all**-Strategie das Gewinner-Neuron der Erkennungsschicht ermittelt: Das Neuron k der F_2-Schicht gewinnt, falls:

$$n_k = \begin{cases} 1, & \text{falls } \max_j(W_j \cdot S) = W_k \cdot S \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist nur das Gewinner-Neuron k aktiviert. Dieses Neuron k besitzt den zur Eingabe I ähnlichsten Gewichtsvektor W_k. Alle anderen Neuronen sind 0.

In der **Vergleichsphase** wird das dem Gewinner-Neuron zugeordnete Muster mit der aktuellen Eingabe verglichen. Der Vektor U enthält nur an der Stelle k eine 1, alle anderen Komponenten sind 0. Der Vektor W_k – das ist der Teil der binären Gewichtsmatrix, der dem Neuron k zugeordnet ist – speichert das Referenzmuster für die Klasse k.

Da U nun verschieden vom Nullvektor ist, wird $g_1 = 0$. Damit feuern wieder die Neuronen der Vergleichsschicht F_1 nach der 2/3-Regel und liefern wiederum S. Es sind nun ausschließlich

die Komponenten von S aktiv, deren entsprechende Positionen sowohl in der Eingabe I als auch im Vektors $V = W_{ji} \cdot U$ aktiv sind:

$$S = I \wedge V = I \wedge W_k$$

Nun wird dieses S, welches die Ähnlichkeit des Referenzmusters W_k mit der Eingabe I verkörpert, mit der Eingabe verglichen. Sind die Unterschiede zu stark $|S|/|I| < sim$, dann feuert die Reset-Komponente:

$$\frac{|S|}{|I|} = \frac{|W_k \wedge I|}{|I|} < sim$$

Ist der Wert größer oder gleich dem *sim*-Parameter, ist die Eingabe als zur Klasse des Neurons k zugehörig identifiziert worden. Die Gewichte des Referenzvektors werden angepasst.

Ist keine Ähnlichkeit erkannt worden, beginnt eine **Suchphase**, in der nach weiteren Gewinner-Neuronen gesucht wird. Dazu wird in S wieder ein Abbild der Eingabe erzeugt. Dies geschieht, da $Reset = 1$ und U somit wieder der Nullvektor und $g_1 = 1$ ist.

Das Neuron k wird aus der Liste der möglichen Gewinner gestrichen und ein nächstes Gewinner-Neuron wird bestimmt (vgl. Erkennungsphase). Ist das zugehörige Referenzmuster hinreichend ähnlich, stoppt die Suche, ansonsten beginnt eine neue Suchphase.

Kann kein Neuron mit hinreichend ähnlichem Referenzmuster gefunden werden, wird eine neue Klasse angelegt, indem das Eingabemuster als Referenzmuster eines bisher noch nicht benutzten Neurons gespeichert wird. Steht kein Neuron mehr zur Verfügung, kann das Muster nicht klassifiziert werden.

Während des Trainingsprozesses erfolgt die **Gewichtsanpassung**. Dazu wird üblicherweise ein Muster so lange angelegt, bis die reellwertigen Gewichte stabile Werte angenommen haben. Nach [Zel97] wird folgende Formel zum Setzen der Werte verwendet:

$$w_{ik} = \frac{L \cdot s_i}{L - 1 + \sum_l S_l}$$

L ist der bereits in der Initialisierungsphase genannte Parameter, der oft mit 2 belegt wird. k ist wieder der Index des Gewinner-Neurons und s_i sind die Komponenten des Vektors S.

Training bedeutet hierbei, dass das Referenzmuster einer Klasse angepasst wird, falls ein weiteres Muster in diese Klasse eingeordnet wurde. Das Referenzmuster soll alle bis dahin in diese Klasse eingeordneten Muster möglichst gut repräsentieren. Daher kommt es zu Anpassungen des Referenzmusters während der Trainingsphase.

Neben den binären ART-Netzen gibt es auch eine Erweiterung auf Netze mit reellwertigen Eingaben. Auf diese Netzform wird an dieser Stelle nicht eingegangen. Der interessierte Leser sei zum Beispiel auf [Zel97] verwiesen.

Übung 7.21 Ein Dilemma

Was wird unter dem Plastizitäts-Stabilitäts-Dilemma verstanden?

Übung 7.22 ART1-Netz

Geben Sie in groben Zügen die Arbeitsweise eines ART1-Netzes wieder.

Übung 7.23 Ähnlichkeitsparameter

Welche Rolle kommt dem Ähnlichkeitsparameter zu?

Übung 7.24 Größe

Wie groß sind die beiden Neuronen-Schichten eins ART1-Netzes zu wählen? Aufgaben

Übung 7.25 Ein ART-Netz

Entwickeln Sie mit Hilfe des JavaNNS ein ART-Netz zur Erkennung von Ziffern, die als 5x7-Muster gegeben sind. Um auch die nächste Aufgabe erfüllen zu können, legen Sie gleich eine Erkennungsschicht mit 16 Neuronen an. In wie viele Klassen zerfallen die Muster 0..9 bei einem Ähnlichkeitsfaktor $sim = 0{,}8$?

Übung 7.26 Hexadezimalziffern

Erstellen Sie eine zweite Musterdatei mit den restlichen Hexadezimalziffern (A..F), und trainieren Sie das ART-Netz. Wechseln Sie erneut die Musterdatei und überprüfen Sie auf diese Weise die am Anfang des Kapitels getroffenen Aussagen über ein ART-Netz.

Übung 7.27 JavaNNS-Beispiel

Machen Sie sich mit dem JavaNNS-Beispiel eines ART1-Netzes vertraut. Dieses soll die Großbuchstaben klassifizieren. Prüfen Sie die Klassifizierungen für verschiedene Ähnlichkeitsparameter: $sim \in (0{,}5; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 0{,}95)$.

Übung 7.28 Bankkunde

Entwickeln Sie ein ART1-Netz für die Klassifikation der Bankkunden. Greifen Sie auf die Daten aus dem Abschnitt 6.2.3 zurück. Die dort vorgenommene Codierung ist für dieses Netz ungeeignet. Erarbeiten Sie eine für das ART-Netz geeignete Codierung. In welche Klassen werden die Datensätze bei einem Ähnlichkeitsparameter von $sim = 0{,}5$ eingeordnet?

Übung 7.29 ART in der Praxis

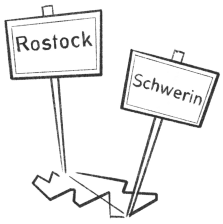
Stellen Sie praktische Anwendungen für ART-Netze zusammen.

8 Autoassoziative Netze

Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, kann das Rundreiseproblem nur mit einer SOM erfolgreich bearbeitet werden, falls die Kosten einer Verbindung zweier Städte exakt dem geometrischen Abstand entsprechen; dann aber sehr effizient.

Es drängt sich die Frage auf, ob nicht anders organisierte Netze geeignet sind, Optimierungsprobleme ebenso oder gar besser zu lösen.

Es gibt ein neuronales Netz, das eine Rundreise optimieren kann, falls die Kosten in Form einer Kostenmatrix gegeben sind. In einer Kostenmatrix können beliebige Kosten für die Fahrt von einem Ort A zum Ort B festgelegt werden. Insbesondere sind auch nicht symmetrische Angaben $w_{AB} \neq w_{BA}$ möglich.



Die geometrische Entfernung zwischen den Städten Rostock und Schwerin beträgt ca. 70 km, realistische Entfernungsangaben für Straßenverbindungen zwischen beiden Städten bewegen sich jedoch zwischen 85 und 90 Kilometern. Eine Netzform, die beliebige Kosten für den Abstand zweier Städte berücksichtigen kann, stellen die **autoassoziativen Netze** dar.

Streng genommen sind autoassoziative Netze nicht als neuronale Netze zu bezeichnen. Ihre Struktur und Arbeitsweise wird mit dem Teilchenverhalten insbesondere in Metallen erklärt. Werden Stoffe erhitzt und danach abgekühlt, sinkt das Energie-Niveau des Stoffes, bis ein stabiler Zustand, ein Minimum erreicht wird. Dieses Verhalten wurde zuerst von Hopfield auf neuronale Netze übertragen. Die Elemente des Netzes, Neuronen, werden hierbei wie Teilchen betrachtet.

8.1 Hopfield-Netze

In einem Hopfield-Netz sind alle Neuronen vollständig untereinander verknüpft. Eine direkte Rückkopplung gibt es jedoch nicht. Weiterhin gibt es keine Unterteilung in verschiedene Schichten, somit existieren weder eine Eingabe- noch eine Ausgabeschicht.

Eine Eingabe wird an das Netz angelegt, in dem die Neuronen diese Werte als initiale Aktivierungen erhalten. Das Netz arbeitet dann so lange, bis keine Änderungen in den Aktivierungen der Neuronen mehr auftreten. Die dann vorhandenen Aktivierungen der Neuronen stellen die Netzausgabe dar.

Der Endzustand eines Netzes hängt von der Netzeingabe und selbstverständlich maßgeblich von den Gewichten der Verbindungen ab. Aus dem bisher Gesagten kann man vermuten, dass es keinen Lernprozess für die Gewichte gibt. Wir beginnen mit der Arbeitsweise eines

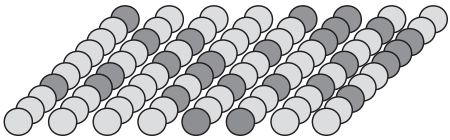


Bild 8.1 Hopfield-Netz

Hopfield-Netzes und diskutieren dann den Einsatz dieser Netze für die Wiedererkennung von Mustern. Hopfield-Netze können zudem auch Optimierungsaufgaben lösen.

8.1.1 Arbeitsweise

Die Funktionsweise eines Hopfield-Netzes wird anhand der Wiedererkennung einfacher Muster, bestehend aus schwarzen und weißen Pixeln erläutert, vgl. Bild 8.2 .

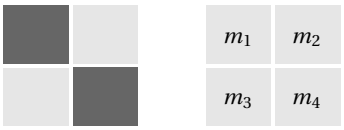


Bild 8.2 Pixel-Muster und Pixel-Bezeichnung

Zur Wiedererkennung des Musters werden so viele Neuronen in das Hopfield-Netz aufgenommen, wie Pixel im Bild enthalten sind. Für ein Muster aus Bild 8.2 wird ein Netz aus vier Neuronen benötigt.

Anders als bei den bisher vorgestellten Netzen werden in einem Hopfield-Netz die **Verbindungsgewichte** w_{ij} nicht trainiert, sondern aus dem Muster heraus bestimmt. Soll das Netz genau ein Muster speichern und anschließend wiedererkennen können, werden die Gewichte nach dieser Formel berechnet:

$$w_{ij} = w_{ji} = \begin{cases} m_i \cdot m_j, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \tag{8.1}$$

Damit ergibt sich für das obige einfache Pixel-Muster folgende symmetrische Gewichtsmatrix, deren Hauptdiagonale stets null ist (Bild 8.3):

w	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0

Bild 8.3 Gewichtsmatrix für das 2x2-Pixel-Muster

Die **Architektur eines Hopfield-Netzes** kann aus einer Gewichtsmatrix abgeleitet werden. In einem Hopfield-Netz sind alle Neuronen vollständig miteinander verbunden. Direkte Rück-

kopplungen gibt es nicht. Eine Unterteilung in Neuronen-Schichten ist gleichfalls nicht gegeben.

Netzeingabe, Netzverarbeitung und Netzausgabe finden in ein und derselben Neuronen-Schicht statt. Die Netzeingabe wird als Anfangsaktivierung an die Neuronen gegeben, die Netzausgabe besteht aus den Aktivierungen der Neuronen nach dem Verarbeitungsprozess. Bild 8.4 zeigt den Anfangszustand des Netzes für ein verrauschtes Eingabe-Muster $x = (1,0,1,1)$. Die Gewichte der Verbindungen ändern sich durch die Verarbeitungsschritte nicht.

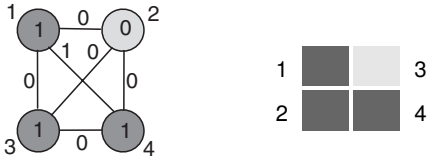


Bild 8.4 Das Hopfield-Netz im Ausgangszustand für das Muster $(1,0,1,1)$

Die Werte des Eingabemusters werden als initiale Aktivierungen der Neuronen eingesetzt. Danach arbeitet das Hopfield-Netz gemäß dem in Listing 8.1 skizzierten Verfahren.

Listing 8.1 Synchrone Arbeitsweise eines Hopfield-Netzes

```
PROCEDURE HopfieldArbeitsweise_synchron
  REPEAT
    FORALL Neuron i DO
      Bestimme Netzeingabe: net[i] = Σ w_ij · o_j
      Ausgabe gemäß Schwellwertfunktion:
        IF net[i] > bias THEN tmp[i]:= 1
        ELSE IF net[i] < bias THEN tmp[i]:=0
               ELSE keine Änderung: tmp[i] := o[i]
    END FOR
                o := tmp
  UNTIL keine Zustandsänderung mehr im Netz
END HopfieldArbeitsweise_synchron
```

In einem Neuron i eines Hopfield-Netzes wird eine Schwellwertfunktion für die Bestimmung der Aktivierung benutzt:

$$o_i(t+1) = act_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } net_i > \theta \\ 0 & \text{falls } net_i < \theta \\ o_i(t) & \text{falls } net_i = \theta \end{cases} \tag{8.2}$$

Bei dieser Form der Aktivierungsfunktion erfolgt keine Änderung der Aktivierung, falls die Netzeingabe exakt dem Schwellwert entspricht. Die Netzeingabe wird dabei wie üblich als Summe der Produkte aus Vorgänger-Aktivierung und Verbindungsgewicht berechnet.

Die Aktivierung wird anhand der üblichen Netzeingabe unter Nutzung der Schwellwert-Funktion berechnet. Die Neuberechnung der Aktivierung wird so lange wiederholt bis keine Änderung in den Aktivierungen mehr vorkommt. Der Algorithmus im Listing 8.1 beschreibt die **synchrone Änderung**: Alle Neuronen berechnen ihre neue Aktivierung aufgrund der vorherigen Werte, bevor ein neuer Verarbeitungsschritt beginnt. Wird ein Neuron zufällig ausgewählt, seine neue Aktivierung berechnet und diese neue Aktivierung bei den weiteren Berechnungen

sofort berücksichtigt, wird diese Form der Änderung als **asynchron** bezeichnet, siehe Listing 8.2. Die Netz-Ausgabe ergibt sich dann aus der Aktivierung der Neuronen, nachdem keine Veränderungen der Aktivierungen mehr auftreten und somit der Einschwingvorgang beendet wurde.

Listing 8.2 Asynchrone Arbeitsweise eines Hopfield-Netzes

```
PROCEDURE HopfieldArbeitsweise_asynchron
  REPEAT
    Wähle zufällig Neuron i aus
    Bestimme Netzeingabe: net[i] = w_ij · o_j
    Ausgabe gemäß Schwellwertfunktion:
      IF net[i] > bias THEN o[i]:= 1
        ELSE IF net[i] < bias THEN o[i]:=0
          ELSE keine Änderung
  UNTIL keine Zustandsänderung mehr im Netz
END HopfieldArbeitsweise_asynchron
```

8.1.2 Wiedererkennung von Mustern

Das Muster $m_S = (1,0,0,1)$ ist in dem einfachen Hopfield-Netz gespeichert, indem die Verbindungsgewichte gemäß der bereits genannten Formel gesetzt werden:

$$w_{ij} = w_{ji} = \begin{cases} m_i \cdot m_j, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Die Gewichtsmatrix für das Netz hat somit das folgende Aussehen.

w	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0

Für die Eingabe $m = (1,0,1,1)$ gemäß Bild 8.5 erhält man, nachdem jedes Neuron einmal neu berechnet wurde, das Aktivierungsmuster $m = (1,0,0,1)$.

Bild 8.5 Eingabe $m = (1,0,1,1)$

$$\begin{array}{lccccll} net_1 = & & 0\cdot 0 & +0\cdot 1 & +1\cdot 1 & = 1 & act'_1 = 1 \\ net_2 = & 0\cdot 1 & & +0\cdot 1 & +0\cdot 1 & = 0 & act'_2 = 0 \\ net_3 = & 0\cdot 1 & +0\cdot 0 & & +0\cdot 1 & = 0 & act'_3 = 0 \\ net_4 = & 1\cdot 1 & +0\cdot 0 & +0\cdot 1 & & = 1 & act'_4 = 1 \end{array}$$

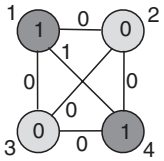


Bild 8.6 Zustand des Hopfield-Netzes nach einem synchronen Hopfield-Schritt

Die Aktivierung nach einem Hopfield-Schritt entspricht bereits dem gespeicherten Muster. Allerdings muss noch ein weiterer Schritt ablaufen, um feststellen zu können, dass keine Zustandsänderung mehr erfolgt:

$$
\begin{array}{llllll}
net_1 = & & 0\cdot 0 & +0\cdot 0 & +1\cdot 1 & = 1 \quad act_1'' = 1 \\
net_2 = & 0\cdot 1 & & +0\cdot 0 & +0\cdot 1 & = 0 \quad act_2'' = 0 \\
net_3 = & 0\cdot 1 & +0\cdot 0 & & +0\cdot 1 & = 0 \quad act_3'' = 0 \\
net_4 = & 1\cdot 1 & +0\cdot 0 & +0\cdot 0 & & = 1 \quad act_4'' = 1
\end{array}
$$

Es können drei mögliche Ergebnisse entstehen:

- Ein *gespeichertes* Muster wurde erkannt.
- Ein zu einem Speichermuster *inverses* Muster wurde erkannt.
- Es konnte *kein* Muster erkannt werden.

Ein Endzustand ist erreicht, falls keine Änderung des Energie-Niveaus mehr stattfindet. Im Fall eines nicht erkannten Musters kann als Reaktion des Netzes auch ein Oszillieren zwischen zwei Mustern auftreten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Als zweites Beispiel bearbeiten wir nun die Eingabe $x = (1,0,0,0)$:

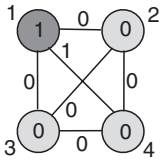


Bild 8.7 Hopfield-Netz im Anfangszustand $x = (1,0,0,0)$

$$
\begin{array}{llllll}
net_1 = & & 0\cdot 0 & +0\cdot 0 & +1\cdot 0 & = 0 \quad act_1' = 0 \\
net_2 = & 0\cdot 1 & & +0\cdot 0 & +0\cdot 0 & = 0 \quad act_2' = 0 \\
net_3 = & 0\cdot 1 & +0\cdot 0 & & +0\cdot 0 & = 0 \quad act_3' = 0 \\
net_4 = & 1\cdot 1 & +0\cdot 0 & +0\cdot 0 & & = 1 \quad act_4' = 1
\end{array}
$$

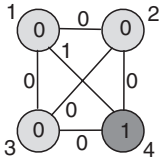


Bild 8.8 Hopfield-Netz nach einem Verarbeitungsschritt

Im zweiten Verarbeitungsschritt tritt das Problem deutlich zu Tage. Das System oszilliert. Die Aktivierung *act"* entspricht der ursprünglichen Aktivierung *act*.

$$
\begin{array}{lllllll}
net_1 = & & 0\cdot 0 & +0\cdot 0 & +1\cdot 1 & = 1 & act_1'' = 1 \\
net_2 = & 0\cdot 0 & & +0\cdot 0 & +0\cdot 1 & = 0 & act_2'' = 0 \\
net_3 = & 0\cdot 0 & +0\cdot 0 & & +0\cdot 1 & = 0 & act_3'' = 0 \\
net_4 = & 1\cdot 0 & +0\cdot 0 & +0\cdot 0 & & = 0 & act_4'' = 0
\end{array}
$$

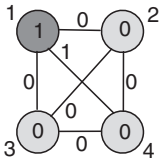


Bild 8.9 Hopfield-Netz nach zwei synchronen Verarbeitungsschritten

Eine asynchrone Bearbeitung kann helfen, derartige Probleme zu vermeiden:

Die Auswahl eines der Neuronen 2 oder 3 führt zu keiner Zustandsänderung. Wird Neuron 4 neu berechnet, ergibt sich die Aktivierung 1 und das Netz hat seinen Endzustand erreicht. Wird stattdessen das Neuron 1 gewählt, ergibt sich die Null-Aktivierung $(0,0,0,0)$, aus der es kein Entrinnen gibt. Das Muster kann dann natürlich nicht erkannt werden.

Bessere Ergebnisse lassen sich mit einer anderen Binarisierung erreichen. Statt der Werte $(0,1)$ werden die Werte $(-1,+1)$ benutzt. Damit werden Merkmale deutlicher in den Verbindungsgewichten gespeichert, wie die folgende Gewichtsmatrix zeigt:

w	1	2	3	4
1	0	-1	-1	1
2	-1	0	1	-1
3	-1	1	0	-1
4	1	-1	-1	0

Bild 8.10 $(-1,+1)$-Gewichtsmatrix für das 2x2-Pixel-Muster

Für unser kritisches Muster $x = (1,-1,-1,-1)$ wird das gespeicherte Muster nun bereits nach einem synchronen Verarbeitungsschritt erreicht (Bild 8.11).

$$
\begin{array}{lllllll}
net_1 = & & (-1)\cdot(-1) & +(-1)\cdot(-1) & +1\cdot(-1) & = 1 & act_1' = 1 \\
net_2 = & (-1)\cdot 1 & & +1\cdot(-1) & +(-1)\cdot(-1) & = -1 & act_2' = -1 \\
net_3 = & (-1)\cdot 1 & +1\cdot(-1) & & +(-1)\cdot(-1) & = -1 & act_3' = -1 \\
net_4 = & +1\cdot 1 & +(-1)\cdot(-1) & +(-1)\cdot(-1) & & = 3 & act_4' = 1
\end{array}
$$

Derartig einfache Hopfield-Netze lassen sich sehr leicht unter Nutzung eines Tabellenkalkulationsprogramms aufbauen und testen. Ein synchroner Verarbeitungsschritt ist als Makro schnell definiert. Der Einschwingvorgang nimmt hierbei nur wenige synchrone Schritte in Anspruch, so dass die Arbeitsweise sehr gut beobachtet werden kann.

Das Bild 8.12 zeigt ein Tabellenblatt für ein Netz zur Wiedererkennung eines 3x3-Musters, hier eines senkrechten Balkens. Man sieht das gespeicherte Muster, die Eingabe sowie alte und

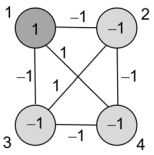


Bild 8.11 Zustand des Hopfield-Netzes nach synchronen Hopfield-Schritten

neue Aktivierung. Wenn im Zuge der Verarbeitung alte und neue Aktivierung übereinstimmen, ist das Ende erreicht. Nicht in jedem Fall stimmen dann Ergebnis und Speichermuster überein.

Mustererkennung mittels Hopfield-Netz

Muster

0	1	0
0	1	0
0	1	0

Eingabe

1	0	0
0	0	0
0	1	1

Netzenergie: -25,0

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
2	1	-1	0	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
3	0	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	1
4	0	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	1
5	1	-1	1	-1	-1	0	-1	-1	1	-1
6	0	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1
7	0	1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1
8	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	0	-1
9	0	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	0

$w_{ij}*o_i*o_j =$

	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
-1	0	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	-1	1
-1	1	1	0	1	1	1	1	-1	1
-1	1	1	1	0	1	1	1	-1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	-1	1
-1	1	1	1	1	1	0	1	-1	1
-1	1	1	1	1	1	1	0	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1
-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0
	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1

alte Aktivierung

0	1	0
0	1	0
0	0	0

alte Aktivierung:	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1
Netzeingabe:	-6	6	-6	-6	6	-6	-6	8	-6
neue Aktivierung:	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1

Ergebnis

0	1	0
0	1	0
0	1	0

Eingabe | Lernschritt

Bild 8.12 Tabellenblatt eines Hopfield-Netzes zur Mustererkennung

Ein Hopfield-Netz ist im Allgemeinen in der Lage, mehr als nur ein Muster zu speichern und wieder zu erkennen. Das Berechnen der Gewichte für die Speicherung mehrerer Muster erfolgt durch das Aufsummieren der für jeweils ein Muster p berechneten Gewichte:

$$w_{ij} = w_{ji} = \begin{cases} \sum_p m_{pi} \cdot m_{pj}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Für die Arbeit mit Hopfield-Musterassoziatoren gelten folgende Aussagen:

- Die Zahl der Muster, die in einem Netz sinnvoll gespeichert werden kann, beträgt ungefähr ein Siebtel der Zahl der Neuronen: $anz_{\text{Muster}} = 0,14 \cdot anz_{Neuronen}$.
- Ein Netz aus 4x4-Neuronen sollte zwei Muster gleichzeitig speichern können.
- Die gespeicherten Muster sollten nahezu gleich viele weiße wie schwarze Pixel aufweisen. Falls ein Ungleichgewicht existiert, kann dies bei der Wahl des Schwellwertes berücksichtigt werden. Kleine Schwellwerte unterstützen das Entstehen von aktiven Neuronen (schwarze

Pixel), analog wird durch hohe Schwellwerte das Abschalten von Neuronen (weiße Pixel) gefördert.

- Die gespeicherten Muster dürfen sich nicht zu ähnlich sein. So unterscheiden sich beispielsweise die Ziffern 5 und 6 nicht deutlich genug, um bei der Wiedererkennung verrauschter Eingaben sicher unterschieden werden zu können.

8.1.3 Energie-Niveau eines Netzes

Das Netz nimmt für seine gespeicherten Muster ein Energie-Minimum an. Mit jedem Verarbeitungsschritt wird ein geringeres Energie-Niveau des Hopfield-Netzes erreicht. Zumindest steigt es nicht wieder an. Die Wiedererkennung eines Musters wird somit zu einer Art Optimierung, das Energie-Niveau muss minimiert werden.

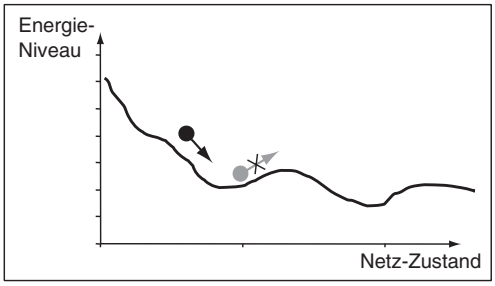


Bild 8.13 Veränderung des Energie-Niveaus

Anhand der aktuellen Aktivierungen der Neuronen wird das Energie-Niveau nach folgender Formel bestimmt:

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot o_i \cdot o_j \;+\; \sum_i \theta_i \cdot o_i$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird benutzt, da alle Summanden aufgrund der symmetrischen Gewichtsmatrix doppelt summiert werden. Häufig verzichtet man auch auf diesen Faktor, da weniger der absolute Wert des Energie-Niveaus gefragt ist, als die relative Veränderung: größer, kleiner.

Der Nachweis, dass ein Hopfield-Netz tatsächlich mit jeder Veränderung der Aktivierung eines Neurons seinen Energie-Zustand zumindest nicht vergrößert, ist gar nicht schwer zu führen.

Sei E' die Netzenergie nach einem Verarbeitungsschritt, dann ist die Energieveränderung ΔE:

$$\Delta E = E' - E$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot o_i' \cdot o_j' \;+\; \sum_i \theta_i \cdot o_i' - \left(-\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot o_i \cdot o_j \;+\; \sum_i \theta_i \cdot o_i \right)$$

Angenommen das Neuron z hat seine Aktivierung geändert, alle anderen Neuronen sind unverändert geblieben. Damit bleiben nur die Summanden übrig, die sich auf das Neuron z beziehen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ kann entfallen, da auf die doppelte Aufsummierung ij und ji nun verzichtet wird, der Index i nur einmal über alle Neuronen ungleich z variiert.

$$\Delta E = E' - E$$

$$\Delta E = -\sum_{i \neq z} w_{iz} \cdot o'_i \cdot o'_z \; + \; \theta_z \cdot o'_z \; - \; \left(-\sum_{i \neq z} w_{iz} \cdot o_i \cdot o_z \; + \; \theta_z \cdot o_z \right)$$

Wird $o'_z - o_z$ zu Δo_z zusammengefasst, erhält man:

$$\Delta E \; = \; -\left(\sum_{i \neq z} w_{iz} \cdot o_i \right) \cdot \Delta o_z \; + \; \theta_z \cdot \Delta o_z \; = \; -\left(\sum_{i \neq z} w_{iz} \cdot o_i + \theta_z \right) \cdot \Delta o_z$$

Nun kann ΔE in Abhängigkeit von Δo_z und der Netzeingabe net_z des Neurons z dargestellt werden:

Mit $net_z = \sum_i w_{iz} \cdot o_i$ erreicht man die Formel:

$$\Delta E \; = \; (-net_z + \theta_z) \cdot \Delta o_z$$

Anhand dieser Formel ist erkennbar, dass die Energie-Differenz stets negativ ist:

- $\Delta o_z > 0$: Das Neuron wurde von 0 auf 1 geschaltet. Das kann nur vonstatten gehen, falls $net_z > \theta_z$ ist, damit ist $\theta_z - net_z < 0$ und somit $\Delta E < 0$.
- $\Delta o_z < 0$: Das Neuron wurde von 1 auf 0 geschaltet. Damit war $net_z < \theta_z$ ist, und somit ist $\theta_z - net_z > 0$ und wiederum $\Delta E < 0$.
- $\Delta o_z = 0$: Das verursacht keine Änderung des Energie-Niveaus.

Es gibt stets endlich viele Neuronen in einem Netz. Deren Aktivierung ist entweder 0 oder 1. Es sind somit nur endlich viele Netzzustände möglich. Damit ist plausibel, dass ein Hopfield-Netz im Laufe der Verarbeitung einen Endzustand erreichen muss. Leider ist es nicht immer ein Zustand mit dem globalen Energie-Minimum; ein Einpegeln auf ein lokales Energie-Minimum ist ebenso möglich.

Hopfield-Netze können prinzipiell zur Lösung von Optimierungsaufgaben genutzt werden. Neben dem Problem, dass nicht immer das globale Energie-Minimum erreicht wird, gibt es weitere Hindernisse für den Einsatz eines Hopfield-Netzes in der Optimierung:

- Die Voraussetzung einer symmetrischen Gewichtsmatrix $w_{ij} = w_{ji}$ ist nicht immer gegeben.
- Da die optimale Lösung nicht bekannt ist, können die Gewichte nicht wie vorher beschrieben aus einem Muster heraus ermittelt werden. Die Anfangsgewichte müssen auf anderem Wege bestimmt werden.

8.2 Lösung von Optimierungsproblemen

Viele Literaturquellen berichten vom Einsatz autoassoziativer Netze für die Lösung von Problemen des **Operations Research**. Dabei steht naturgemäß das Problem des **Handelsreisenden** (TSP) an vorderer Stelle. Weiterhin wird häufig auf das so genannte **N-Damen-Problem** zurückgegriffen.

N-Damen-Problem:

Bei einem N-Damen-Problem gilt es, N Dame-Schachfiguren auf einem $N \times N$-Felder großen Schachbrett so zu verteilen, dass die Dame-Figuren sich nicht gegenseitig bedrohen.

Obwohl ein Algorithmus bekannt ist, der in linearer Zeit eine mögliche Lösung liefert, bleibt die Suche nach einer Lösung nach wie vor ein Problem von exponentieller Komplexität. Es ist somit genauso schwer wie das Problem des Handelsreisenden.

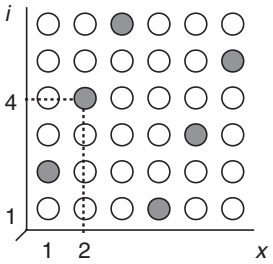


Bild 8.14 Netz zur Lösung des Sechs-Damen- oder des TSP-Problems mit sechs Orten

Beide Aufgaben werden in ähnlicher Weise auf ein neuronales Netz abgebildet. Ist ein Problem der Größe N gegeben, es sind N Städte zu besuchen bzw. es sind N-Damefiguren zu verteilen, so ist eine Schicht aus $N \times N$-Neuronen notwendig.

Ist das Neuron mit den Koordinaten x und i der Schicht aktiv, so ist dies wie folgt zu interpretieren: Der Ort x ist an i-ter Position in der Rundreise zu besuchen. Dabei seien alle Orte von 1 beginnend aufsteigend durchnummeriert.

Eine gültige Lösung, eine echte Rundreise, ist dadurch charakterisiert, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Neuron aktiv ist. Mehrere aktive Neuronen in einer Spalte x hätten zur Folge, dass die Stadt x mehrmals zu besuchen wäre. Mehrere aktive Neuronen in einer Zeile i sind so zu interpretieren, dass mehrere Städte gleichzeitig an i-ter Position zu besuchen wären.

Das Bild 8.14 zeigt eine gültige Lösung sowohl für das Rundreiseproblem als auch für das Sechs-Damen-Problem. Allerdings ist nicht erkennbar, ob diese Lösung für das Rundreiseproblem optimal ist.

Nur ein aktives Neuron je Zeile und Spalte ist die hinreichende Bedingung für eine gültige Rundreise. Für die Lösung der eigentlichen Fragestellung sind die Entfernungen zwischen den Orten mit zu berücksichtigen. Diese werden in einer Entfernungsmatrix abgelegt.

Vom Hopfield-Netz her ist bekannt, dass einem derartigen Netz ein Energie-Niveau zugeordnet werden kann, das sich wie folgt berechnet:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \sum_x \sum_i \sum_y \sum_j w_{xi,yj} \cdot o_{xi} \cdot o_{yj}$$

Man geht davon aus, dass ein Neuron entsprechend seiner Position in der quadratischen $N \times N$-Schicht doppelt indiziert ist. Es wäre nun sehr angenehm, wenn man wie bei einem binären Hopfield-Netz mit einem zufälligen Eingabemuster durch analoge Verarbeitungsschritte zu einem Muster gelangen könnte, das einer optimalen Lösung entspricht.

Leider ist dies nicht so einfach wie bei der Mustererkennung. Dort ist klar vorgegeben, wie die Gewichte für ein wieder zu erkennendes Muster zu bestimmen sind. Für Optimierungsauf-

gaben müssen die Gewichte anderweitig problembezogen bestimmt werden, da das Muster einer optimalen Lösung nicht bekannt ist.

Eine Vorgehensweise besteht darin, eine **problembezogene Energie-Funktion** zu Hilfe zu nehmen. Diese muss alle Randbedingungen des Problems angemessen berücksichtigen. Das Verletzen einer Randbedingung muss zu einem deutlich schlechteren, d. h. höheren Energie-Niveau des Netzes führen.

Die Energie-Funktion muss das Minimum für eine optimale Lösung des Problems annehmen. Für das Rundreiseproblem wird in der Literatur [Zel97], [LM98] folgende Funktion angegeben:

$$\begin{aligned} E_{\text{TSP}} \quad = \quad & A \cdot \sum_x \sum_i \sum_j o_{xi} \cdot o_{xj} \\ & + B \cdot \sum_i \sum_x \sum_y o_{xi} \cdot o_{yj} \\ & + C \cdot \sum_x \sum_i (o_{xi} - N)^2 \\ & + D \cdot \sum_i \sum_x \sum_y dist_{xy} \cdot o_{xi} \cdot (o_{y(i+1)} + o_{y(i-1)}) \end{aligned}$$

Jeder Term hat dabei eine spezifische Aufgabe:

- $A \cdot \sum_x \sum_i \sum_j o_{xi} \cdot o_{xj}$
  Dieser Summand ist stets nichtnegativ und nur dann minimal (= 0), falls in jeder Spalte höchstens ein Neuron aktiv ist.
- $B \cdot \sum_i \sum_x \sum_y o_{xi} \cdot o_{yj}$
  Der Term ist in analoger Weise nur dann null, falls in jeder Zeile höchstens ein Neuron aktiv ist.
- $C \cdot \sum_x \sum_i (o_{xi} - N)^2$
  Damit als Ergebnis nicht die Null-Lösung entsteht, bei der kein Neuron aktiv ist, bestraft dieser Term jede Situation, in der nicht genau N Neuronen aktiv sind.
- $D \cdot \sum_i \sum_x \sum_y dist_{xy} \cdot o_{xi} \cdot (o_{y(i+1)} + o_{y(i-1)})$
  Hiermit wird der optimale Rundweg favorisiert. $dist_{xy}$ ist die Entfernung zwischen dem Ort x und dem Ort y entsprechend der Entfernungsmatrix. Damit tatsächlich die aufeinanderfolgenden Orte betrachtet werden, sind die Indizes der Angaben innerhalb der Klammern modulo N zu sehen. Falls $i = N$ ist $i + 1$ als Index 1 zu verstehen. Der gesamte Term nimmt sein Minimum genau für eine minimale Rundreise an.

Um nun die initialen Gewichte für das Hopfield-Netz bestimmen zu können, wird die allgemeine Energie-Funktion eines Hopfield-Netzes mit der problemspezifischen Energie-Funktion gleichgesetzt.

$$E = E_{\text{TSP}}$$

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot o_i \cdot o_j \quad + \quad \sum_i \theta_i \cdot o_i$$

Daraus werden die Gewichte ermittelt. Das Bestimmen der Gewichte stellt sich dabei als weit schwieriger heraus, als auf den ersten Blick zu vermuten ist.

In [Zel97] werden die Gewichte $w_{xi,yj}$ wie folgt angegeben:

- $w_{xi,yj} = -A \cdot \delta_{x,y}(1 - \delta_{i,j}) - B \cdot \delta_{i,j} \cdot (1 - \delta_{x,y}) - C - D \cdot dist_{xy}(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1})$

Dabei ist $\delta_{i,j} = 1$, falls $x = y$, sonst ist $\delta_{x,y} = 0$.

Die Gewichte der Verbindungen werden gemäß obiger Formel initialisiert. Es gilt, geeignete Werte für die vier Parameter der problembezogenen Energie-Funktion A, B, C sowie D zu finden. Ist noch leicht einsehbar, dass $A = B$ eine gute Wahl darstellt, so ist das Verhältnis zu C und das Verhältnis von A, B, C zu D nicht einfach erkennbar. Hier helfen nur Experimente.

Danach arbeitet das Netz in der vorher beschriebenen Weise. Um unterschiedliches Verhalten zu erzielen, sollte unbedingt die asynchrone Form der Verarbeitung (Listing 8.2 auf Seite 292) gewählt werden: Ein zufällig ausgewähltes Neuron ändert seinen Zustand.

Die Ergebnisse sind aus unserer Erfahrung nicht sehr ermutigend. Selten sind gültige Rundreisen zu erkennen und noch seltener sind diese nahe der minimalen Route. Das liegt unter anderem daran, dass ein Hopfield-Netz ein eingenommenes lokales Energie-Minimum nicht wieder verlassen kann. Dazu müsste im Zuge der Bearbeitung auch ein energiereicheres Niveau angenommen werden können. Die Boltzmann-Maschine ermöglicht ein derartiges Vorgehen.

8.3 Die Boltzmann-Maschine

Die Architektur einer Boltzmann-Maschine unterscheidet sich nicht von einem Hopfield-Netz. Wir haben wieder eine einzige Schicht von Neuronen, die untereinander vollständig miteinander verbunden sind. Direkte Rückkopplungen sind auch bei der Boltzmann-Maschine nicht vorhanden.

Ein Hopfield-Netz nimmt mit jedem Verarbeitungsschritt einen Zustand ein, dessen Energie-Niveau keinesfalls höher als das vorherige ist. Das führt häufig zu lokalen Energie-Minima, die nicht wieder verlassen werden können. Hier setzt die Boltzmann-Maschine an. Es wird zugelassen, ja geradezu gewünscht, dass ein Netz hin und wieder auch energiereichere Zustände einnehmen kann. Damit wird die Chance erhöht, ein lokales Energie-Minimum wieder verlassen zu können.

Als Vorbild dient auch hier wieder das Teilchenverhalten in Metallen. Konkreter ist es die Art und Weise der Metallbearbeitung, um ein stabileres Material zu erhalten. Beim Tempern werden Stoffe erhitzt und in Stufen wieder abgekühlt. Als Charakterisierung des Energie-Niveaus dient in diesem Fall die Temperatur des Materials.

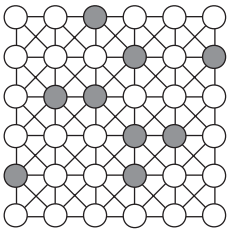


Bild 8.15 Vollvernetzte Neuronenschicht einer Boltzmann-Maschine

Das Erhitzen und anschließende Abkühlen wird auf das künstliche Teilchen-Netz übertragen. Man spricht daher bei der Boltzmann-Maschine auch vom **simulierten Abkühlen**, dem **Simulated Annealing**.

Wie kann nun das zwischenzeitliche Erwärmen erreicht werden? In einem Verarbeitungsschritt wird nicht immer die Aktivierung eines Neurons geändert. Die Änderung der Aktivierung erfolgt zufällig und wird dabei von einem so genannten **Temperatur-Parameter** T mit beeinflusst. Im Einzelnen beruht die Berechnung der Aktivierung auf folgenden Überlegungen.

Sei act'_k die neue Aktivierung des Neurons k und act_k die bisherige Aktivierung. Mit E' sei das Energie-Niveau des Netzes bezeichnet, das nur durch die Änderung der Aktivierung des Neurons k entsteht. E ist die alte Netz-Energie.

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot o_i \cdot o_j \;+\; \sum_i \theta_i \cdot o_i \tag{8.3}$$

Die Netz-Energie E' wird nach derselben Funktion bestimmt, unterscheidet sich nur in der Aktivierung des Neurons k. Wir bezeichnen nun die ursprüngliche Aktivierung des Neurons k mit o_k, die neue Aktivierung mit p_k. Alle Summanden, in denen die Aktivierung des Neurons k nicht enthalten ist, sind in gleicher Weise in E' und in E enthalten. Diese liefern somit keinen Beitrag zur Energie-Änderung. Damit ergibt sich ohne die Summanden, die weder o_k noch p_k enthalten, die Formel:

$$\Delta E = E' - E = -\sum_i w_{ik} \cdot o_i \cdot (p_k - o_k) \;+\; \theta_k \cdot (p_k - o_k) \tag{8.4}$$

Somit erhält man für die Änderung der Energie eine Formel, die der Netzeingabe des Neurons k entspricht. Dabei können nun zwei Fälle unterschieden werden:

1. Neuron k wird angeschaltet: $o_k = 0$ und $p_k = 1$.

$$\Delta E \;=\; -\sum_i w_{ik} \cdot o_i \cdot (1-0) \;+\; \theta_k \cdot (1-0) \;=\; -\sum_i w_{ik} \;+\; \theta_k = -net_k \tag{8.5}$$

2. Neuron k wird angeschaltet: $o_k = 1$ und $p_k = 0$.

$$\Delta E \;=\; -\sum_i w_{ik} \cdot o_i \cdot (0-1) \;+\; \theta_k \cdot (0-1) \;=\; \sum_i w_{ik} \;-\; \theta_k = net_k \tag{8.6}$$

Das Neuron k ändert nun seine Aktivierung, falls:

- $E' < E$ oder $\Delta E < 0$ und somit sich das Energie-Niveau des Netzes verringert oder
- eine Energie-Erhöhung des Netzes mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit akzeptiert wird.

Die zwei Fälle werden nun gemäß dem Vorzeichen der Energie-Differenz weiter unterschieden:

1.1 Neuron k wird angeschaltet: $o_k = 0$ und $p_k = 1$; die Energie-Differenz ist negativ $\Delta E < 0$. Nach Formel 8.5 bedeutet das

$-net_k < 0$ und somit $net_k > 0$

In diesem Falle sollte das Neuron k tatsächlich aktiviert werden!

1.2 Neuron k wird angeschaltet: $o_k = 0$ und $p_k = 1$; die Energie-Differenz ist positiv $\Delta E > 0$. Nach Formel 8.5 bedeutet das

$-net_k > 0$ und somit $net_k < 0$

Das Neuron k wird nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aktiviert.

2.1 Neuron k wird ausgeschaltet: $o_k = 1$ und $p_k = 0$; die Energie-Differenz ist negativ $\Delta E < 0$. Nach Formel 8.6 bedeutet das

$net_k < 0$

Das Neuron k sollte tatsächlich ausgeschaltet werden.

2.2 Neuron k wird ausgeschaltet: $o_k = 1$ und $p_k = 0$; die Energie-Differenz ist positiv $\Delta E > 0$. Nach Formel 8.6 bedeutet das

$net_k > 0$

Das Neuron k wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dennoch aktiviert.

Für die neue Aktivierung gilt nun zusammenfassend, dass das Neuron angeschaltet wird, falls die Netzeingabe positiv ist oder eine gewisse Wahrscheinlichkeit für eine Aktivierung spricht. Dieses Vorgehen wird durch die folgende stochastische Aktivierungsfunktion erreicht:

$$act_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } random() \leq \frac{1}{1+e^{-\frac{net_k}{T}}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8.7}$$

Die logistische Funktion berechnet hier nicht die Aktivierung direkt, sondern nur die Wahrscheinlichkeit der Zustandsänderung beeinflusst.

Ist die Netzeingabe positiv, so ist das Neuron nach 1.1 anzuschalten, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit sollte es nach 2.2 jedoch ausgeschaltet werden. Positives net_k führt in Abhängigkeit von T zu einem Wert nahe 1 und somit zu einer hohen Wahrscheinlichkeit des Anschaltens. Analog überlege man sich das Verhalten für eine negative Netzeingabe.

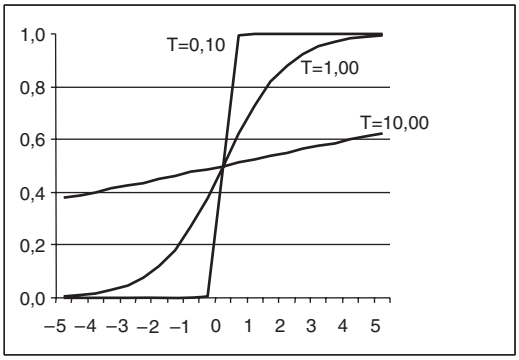


Bild 8.16 Funktionsverlauf für unterschiedliche Temperatur-Parameter

Mit dem Temperatur-Parameter T wird das Verhalten gesteuert. Ein sehr großes T führt zu einem gleich wahrscheinlichem An- bzw. Ausschalten des Neurons, wie das Bild 8.16 unterstreicht.

Für das Einschwingen einer Boltzmann-Maschine wird ein Abkühlungsplan aufgestellt, der den Temperatur-Parameter schrittweise verringert, so dass Aktivierungsänderungen von

Neuronen immer seltener auftreten, falls damit eine Energie-Erhöhung verbunden ist. Eine Boltzmann-Maschine arbeitet gemäß dem Algorithmus im Listing 8.3.

Listing 8.3 Arbeitsweise einer Boltzmann-Maschine

```
PROCEDURE Boltzmann-Einschwingen
  Wähle genügend großen Temperatur-Parameter T
  REPEAT
    REPEAT
      Wähle zufällig Neuron k aus
      Bestimme neuen Ausgabewert o_k gemäß Formel 8.7
    UNTIL Energieniveau im Mittel konstant
    Verringere Temperatur (oft: T = 1/(Nr des Zeitschritts)
  UNTIL Stabiler Zustand
END Boltzmann-Einschwingen
```

Mitunter wird zwischen dem **Simulated Annealing** und der **Boltzmann-Maschine** unterschieden [BKKN03]. Der Unterschied ergibt sich aus der Behandlung des Temperatur-Parameters. Wird dieser während des Einschwingvorgangs verringert, spricht man vom simulierten Abkühlen, benutzt man während des Verfahrens einen konstanten Temperatur-Parameter T bezeichnet man das als Boltzmann-Maschine.

Einige Ansätze verzichten bei einer Boltzmann-Maschine ganz auf die Bestimmung von Gewichten. Als Konsequenz daraus lässt sich die Energie-Differenz nicht mehr als Netzeingabe eines Neurons berechnen. Die Änderung der Aktivierung eines Neurons wird direkt unter Nutzung der problembezogenen Energie-Funktion berechnet. Die aufwendige Energie-Funktion ist somit stets komplett neu zu berechnen, um daraus die Energie-Differenz bestimmen zu können.

Das Konzept der neuronalen Netze und insbesondere der Berechnung einer Netzeingabe wird hierbei zum Teil beiseite gelegt. Das Umsetzen dieser Vorgehensweise erscheint jedoch einfacher.

Übung 8.1 Aufbau Hopfield-Netz

Erläutern Sie den Aufbau und die Arbeitsweise eines Hopfield-Netzes.

Übung 8.2 Arbeitsweise Hopfield-Netz

Wie werden die Gewichte eines Hopfield-Netzes für die Wiedererkennung von Mustern bestimmt?

Übung 8.3 Hopfield oder Boltzmann?

Stellen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Hopfield-Netz und Boltzmann-Maschine zusammen.

Übung 8.4 Musterspeicher

Können Sie einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der gespeicherten Muster in einem Hopfield-Netz, dem Schwellwert der Neuronen und der Wiedererkennung ermitteln?

Übung 8.5 Optimieren mit autoassoziativen Netzen

Wie kann ein autoassoziatives Netz zur Lösung einer Optimierungsaufgabe eingesetzt werden?

Übung 8.6 N-Dame-Problem

Wie könnte eine Energie-Funktion aussehen, mit der sich das N-Dame-Problem angehen lässt?

Übung 8.7 Probieren

Auf den zu diesem Buch gehörenden WWW-Seiten finden Sie ein Demonstration-Applet für ein Hopfield-Netz. Probieren Sie die Speicherung mehrerer selbst gezeichneter Muster und testen Sie verrauschte Eingaben.

Übung 8.8 Tabellenkalkulation

Entwickeln Sie ein Hopfield-Netz der Größe 8x8 mit Hilfe einer Tabellenkalkulation oder in einer Programmiersprache. Speichern Sie mehrere Muster und testen Sie die Wiedererkennung anhand verrauschter Eingabe.

Übung 8.9 Rundreise

Implementieren Sie ein Hopfield-Netz, initialisieren Sie die Gewichte wie für das TSP notwendig und versuchen Sie für beispielsweise fünf Städte eine optimale Rundreise zu ermitteln.

Übung 8.10 Optimieren mit autoassoziativen Netzen

Suchen Sie nach erfolgreichen Beispielen für die Anwendung des Simulated Annealing sowie einer Boltzmann-Maschine auf Optimierungsprobleme und stellen Sie diese in einem Vortrag zusammen.

9 Entwicklung neuronaler Netze

Wie lassen sich nun künstliche neuronale Netze entwickeln? Zum einen kann entsprechende Software zum Einsatz kommen, zum anderen können neuronale Netze selbst implementiert werden. In diesem Kapitel gehen wir auf den Einsatz künstlicher neuronaler Netz als Komponenten von Datenanalyse-Software ein und geben Anregungen für eine eigene Implementierung neuronaler Netze.

Obwohl der *JavaNNS* bereits in die Jahre gekommen ist, sehen wir es nach wie vor als ein System an, mit dem ein sehr guter Einstieg in die Arbeit mit neuronalen Netzen möglich ist. Im JavaNNS können neuronale Netze aufgebaut, trainiert und deren Arbeitsweise sehr gut veranschaulicht werden. Als Basis für eine eigene Implementierung neuronaler Netze nutzen wir zum einen Java und stellen zum anderen eine auf *TensorFlow* und *Python* basierende Herangehensweise vor.

Damit wird dem Leser ganz konkrete Unterstützung für den Aufbau und das Trainieren von neuronalen Netzen in unterschiedlichen Umgebungen gegeben. Aufgaben, wie sie zum Beispiel im Rahmen des deutschen Data Mining Cups gestellt werden, können mittels der in den folgenden Abschnitten beschriebenen Vorgehensweisen gelöst werden.

9.1 Datenanalyse-Software

Data-Mining-Software wie KNIME, der Konstanz Information Miner [KNI19], der RapidMiner [Rap19] oder WEKA, das Waikato Environment for Knowledge Analysis [EHW19], bieten die Möglichkeit, künstliche neuronale Netze in die Analyse-Aufgabe einzubinden. Dabei steht die Entwicklung von Klassifikatoren im Mittelpunkt. Es wird ein Attribut ausgewählt,nachdem die Datensätze klassifiziert werden sollen. Alle anderen Attribute des eingehenden Datensatzes werden als Eingaben für das neuronale Netz verwendet. Aus den Werten des Klassifikationsattributs wird die Ausgabe-Schicht des Netzes gebildet: Je ein Neuron für jeden Wert. Die Architektur des Netzes wird so weitgehend automatisch bestimmt.

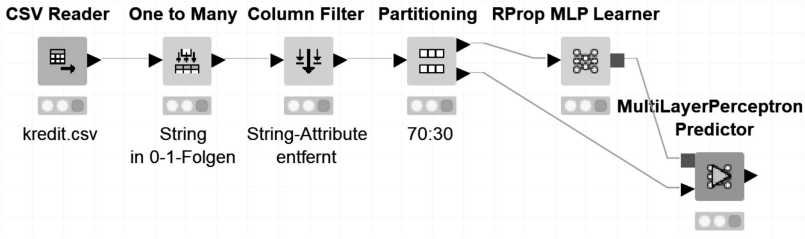


Bild 9.1 Workflow in KNIME mit Einsatz eines vorwärtsgerichteten neuronalen Netzes

Im KNIME werden Verarbeitungseinheiten, sogenannte Nodes, zu Workflows verknüpft. Die Abbildung 9.1 zeigt einen Workflow zum Trainieren eines vorwärtsgerichteten neuronalen Netzes. Die Daten werden eingelesen, in 0-1-Werte umgewandelt (vergleiche Abschnitt 6.4.2) und dem Datensatz hinzugefügt. Die nun überflüssigen originalen Zeichenketten-Werte werden entfernt. Selbst bei dieser kleinen Datenmenge wollen wir einen Test des Netzes ermöglichen und so werden die Daten in eine Trainingsmenge (70% der Daten) und in eine Testmenge (30%) aufgeteilt. KNIME stellt einen Knoten zum Aufbau und zum Trainieren eines mehrschichtigen, vorwärtsgerichteten neuronalen Netzes bereit: *RProp MLP Learner*. Dieser Learner baut wie oben skizziert ein Netz auf. Der Nutzer wählt nur das Attribut, nach welchem die Daten zu klassifizieren sind. Den Aufbau des Netzes kann man durch die Angabe der Zahl der verdeckten Schichten und deren Größe beeinflussen. Allerdings sind alle verdeckte Schichten dann gleich groß.

Für das Lernen wird das RProp-Verfahren verwendet, die Parameter hierfür sind nicht beeinflussbar, siehe Abschnitt 6.2.3. Einzig die Zahl der Trainingszyklen wird festgelegt. Im Ergebnis entsteht ein Modell, welches dann an Knoten *MultilayerPerceptron Predictor* weitergereicht wird. Dieser Knoten, dieses gelernte Netz, klassifiziert dann die eingehenden Datensätze. Für jedes Ausgabe-Neuron wird die Aktivierung berechnet, die Zugehörigkeit zur entsprechenden Klasse ausdrückt. Die Klasse mit dem höchsten Wert wird vorausgesagt.

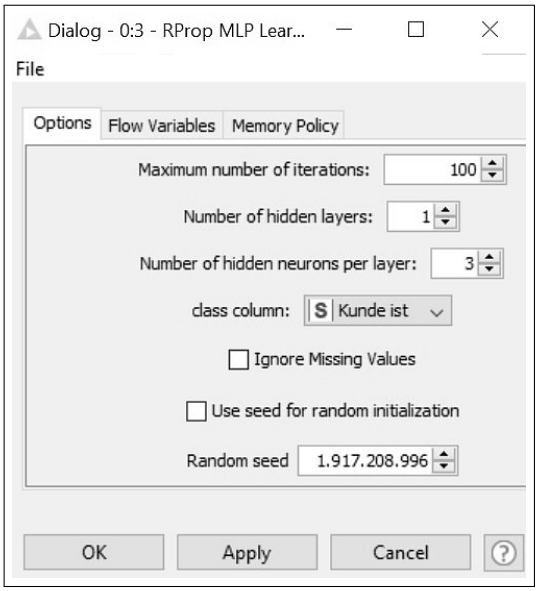


Bild 9.2 Konfiguration des neuronalen Netzes in KNIME RProp Learner

Die Arbeit mit diesen Knoten zum Aufbau, Lernen und Anwenden eines neuronalen Netzes ist sehr bequem. Es lassen sich sehr schnell erste Lösungen entwickeln. Für den Eingeweihten ist der fast als Blackbox daherkommende RProp MLP Learner nicht immer überzeugend. Es fehlen die Möglichkeiten des Experimentierens mit verschiedenen Lernalgorithmen und auch verschiedenen Ausgabe-Schichten.

Die Module im RapidMiner verwenden ein Backpropagation-Lernverfahren mit Momentum. So können die Lernrate und das Momentum vom Nutzer beeinflusst werden.

9.2 JavaNNS

Der *JavaNNS* ist eine in Java entwickelte Benutzungsoberfläche für den Stuttgarter Neuronale Netze Simulator. Die Software wird zwar nicht mehr weiterentwickelt und auch nicht mehr unterstützt, für den Einsteiger ist es aber nach wie vor ein gutes System, um sich mit den verschiedenen Formen künstlicher neuronaler Netze, deren Trainingsmöglichkeiten und deren Einsatz vertraut zu machen. Eine Reihe von Visualisierungen sowohl der Netzstruktur als auch des Netzverhaltens erleichtern die Arbeit.

Auf den Webseiten zum Buch finden Sie auch den JavaNNS.

Die Benutzung ist sehr einfach und kann schnell erlernt werden. Bild 9.3 zeigt die typische Arbeitsumgebung im Trainingsprozess: Im View-Network-Fenster wird das Netz angezeigt, hier ein XOR-Netz. Unter dem Menüpunkt Tools findet sich das Control-Panel, mit dem der Trainingsprozess gesteuert wird. Der Fortschritt im Training wird im Error-graphFenster angezeigt.

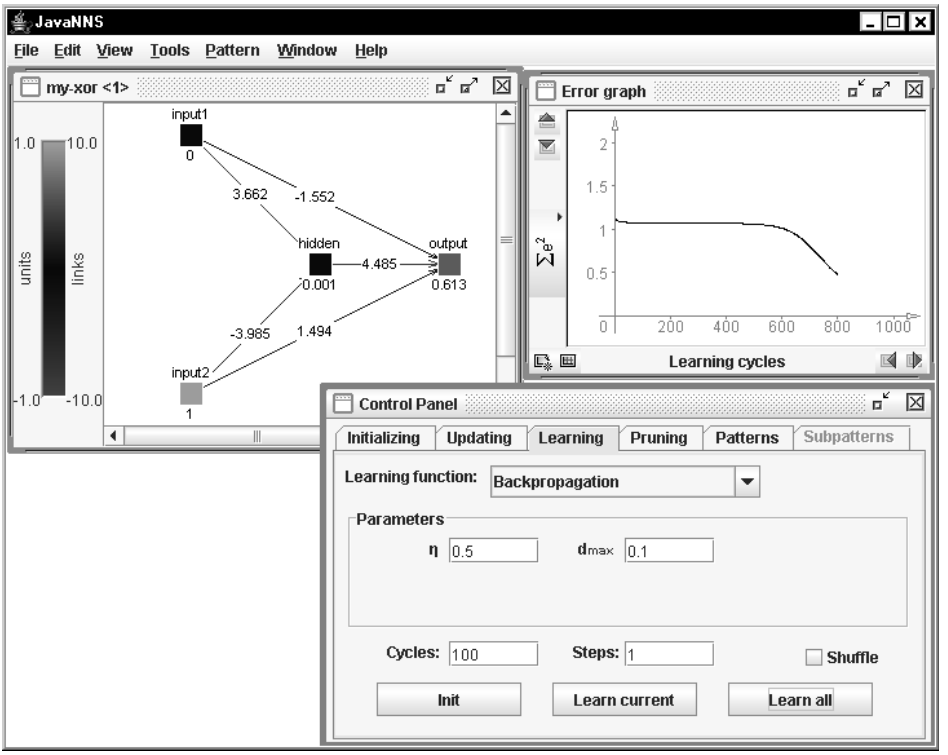


Bild 9.3 Das JavaNNS-Fenster

Eigenschaften von Neuronen, wie Bezeichnungen oder Aktivierungsfunktion, können im View-Network-Fenster unter Verwendung der rechten Maustaste angezeigt und verändert werden. Werden in der Karteikarte Patterns des Control Panels unterschiedliche Mustermengen für das Training und das Testen eingestellt, so werden im Error-graph-Fenster beide Kurven gleichzeitig zum Vergleich dargestellt.

Der Aufbau neuer Netze erfolgt sehr schnell unter Nutzung der Create-Werkzeuge, die unter Tools>Create angeboten werden. Man beginnt mit den Schichten und generiert diese von der Eingabe- zur Ausgabeschicht von links nach rechts. Der Typ des Neurons muss dabei richtig eingestellt sein und dann wird erst mittels Create die Schicht erzeugt. Analog erfolgt die Erzeugung der Verbindungen erst durch den Button Create im CreateLinks-Fenster.

Muster-Dateien lassen sich analog zur Vorgehensweise im SNNS erzeugen: Interaktiv wird eine neue Muster-Datei angelegt (control panel > Karteikarte Patterns) und mittels „add a new pattern“ ein neues Muster in die Datei aufgenommen. Mittels File-Save > data können die Ergebnisse in eine Resultatsdatei gespeichert werden, die dann für weitere Analysen zur Verfügung steht. Für Auswertungen ist es sinnvoll, die Trainingsausgabe mit in die Resultatsdatei aufzunehmen (include output patterns).

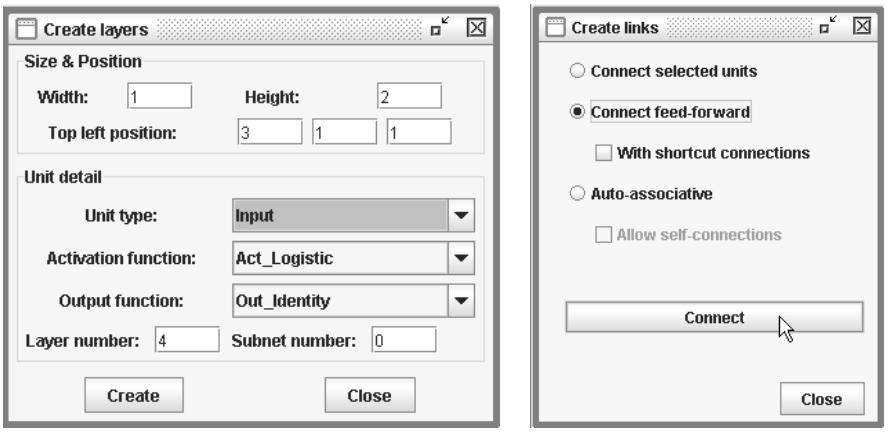


Bild 9.4 Die Create-Tools zum Aufbau von Neuronen-Schichten

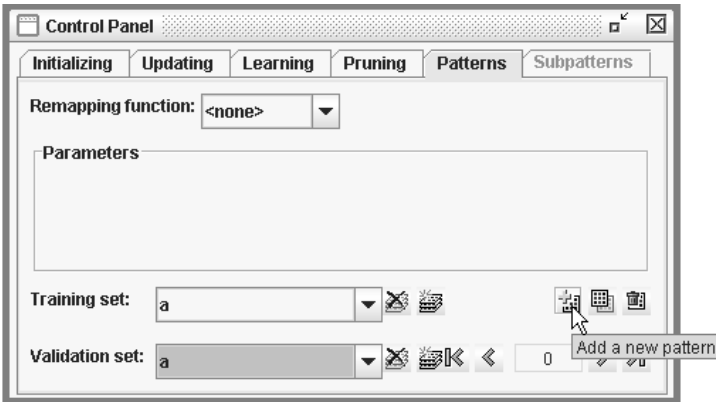


Bild 9.5 Der Aufbau einer neuen Muster-Menge

9.3 Implementation neuronaler Netze

In diesem Abschnitt erhalten diejenigen, die (noch) keine professionellen Programmierer sind, Anregungen, wie neuronale Netze in einer Programmiersprache implementiert werden können. Im Mittelpunkt steht die Abbildung der Architekturen neuronaler Netze auf konkrete Datenstrukturen. Die Lernalgorithmen wurden im Zusammenhang mit den verschiedenen Netz-Architekturen in Form von Pseudocode vorgestellt und können dort nachgelesen werden. Die Umsetzung in konkreten Programmcode sollte ohne größere Schwierigkeiten zu bewältigen sein, wenn die Grundstrukturen, wie in diesem Kapitel vorgestellt, realisiert werden.

Für die Darstellung der objektorientierten Entwürfe wird auf die **Unified Modelling Language (UML)** zurückgegriffen. Als Programmiersprache setzen wir **Java** und **Python** ein:

- Java ist mehr als andere Sprachen unabhängig vom konkreten Betriebssystem und der zugrunde liegenden Hardware. Derselbe Quellcode funktioniert sowohl unter Windows als auch unter Unix-Betriebssystemen.
- Java ist eine objektorientierte Sprache, die zudem eine Reihe von Sicherheiten in der Programmierung bietet bzw. fordert. Sie ist anders als C++ oder ObjectPascal nicht nur eine objektorientierte Erweiterung, sondern eine konsequent objektorientierte Sprache. Die Modularisierung wird gefördert, Zeiger-Akrobatik, wie in der Sprache C, wird reduziert und einige häufig auftretende Fehler wie nicht initialisierte Variable werden bereits vom Compiler angemahnt.
- Die Objektorientierung erlaubt eine gute Modularisierung mit vielen Vorteilen für die Software-Entwicklung.
- Nachteilig ist gerade für große Anwendungen die geringe Geschwindigkeit bei der Abarbeitung von Programmen. Das kann bei praktischen Anwendungen von entscheidender Bedeutung sein; dessen sind sich die Autoren durchaus bewusst. Für einen Einstieg in das Gebiet spielt dies jedoch eine untergeordnete Rolle.
- Python ist eine Sprache, die viele Programmierparadigmen vereint. Die Möglichkeit, Python als Skriptsprache einzusetzen, befördert schnelle Experimente.
- Für Python sind viele leistungsfähige Bibliotheken für die Arbeit mit Matrizen sowie für die Entwicklung von neuronalen Netzen verfügbar.
- Insbesondere für Convolutional Neural Networks stehen mit Keras und Tensorflow starke Pakete bereit, mit denen weltweit viel gearbeitet wird.

Neuronale Netze sind aus mathematischer Sicht betrachtet *Graphen*. Die Neuronen sind gewichtete (Aktivierung) *Knoten*, die durch *gerichtete und gewichtete Kanten* miteinander verbunden sein können. Im Allgemeinen liegt ein zusammenhängender Graph vor. Eine Ausnahme bilden zum Beispiel die neuronalen Gase.

Für die Implementation neuronaler Netze kann somit auf Techniken zur Implementation von Graphen zurückgegriffen werden.

9.3.1 Einsatz von Array-Datenstrukturen

Array-Datenstrukturen stellen eine sehr einfache, aber oft speicheraufwendige Realisierung der Verbindungen mit ihren Gewichten dar. Besteht ein Netz aus N Neuronen, so kann in einem zweidimensionalen Array die Gewichtsmatrix implementiert werden:

```
int N = 20;               // Anzahl der Neuronen
double[][] weight;        // Gewichtsmatrix Deklaration
...
weight = new double[N][N] // Matrix mit NxN-Elementen erzeugen
```

Die Neuronen können ebenso in einem Array abgespeichert werden. Im einfachsten Fall werden nur die Aktivierungswerte verwaltet, so dass wir es mit einem Array von reellen Werten zu tun haben:

```
double[] neuron;
...
neuron = new double[N];
```

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in den simplen Strukturen und in den sehr einfachen Zugriffen auf Aktivierungen und Verbindungsgewichte. Dagegen spricht, dass aus dem Array selbst die Schichtenstruktur eines Netzes nicht erkennbar ist. Darüber hinaus wird insbesondere bei mehrschichtigen vorwärtsgerichteten Netzen viel Speicherplatz in der Gewichtsmatrix vergeudet, da die Gewichtsmatrix dann sehr schwach besetzt ist. Für ein einfaches Perzeptron kann die Matrix effektiver gestaltet werden. Dazu wird die eine Dimension durch die Eingabe-Neuronen, die andere durch die Ausgabe-Neuronen ausgefüllt:

```
double[]   inputNeuron;
double[]   outputNeuron;
int        nInputNeuron;
int        nOutputNeuron;
double[][] weight;
...
weight = new double[nInputNeuron][nOutputNeuron];
```

Die **Datenstruktur Array** eignet sich auch für Netzarchitekturen, in denen Schichten mehrdimensional angeordnet werden, wie beispielsweise in der selbstorganisierenden Karte, dem Hopfield-Netz oder der Boltzmann-Maschine. In diesen Netzen sind die Koordinaten eines Neurons in einer Schicht von besonderem Interesse.

In der Tabelle 9.1 auf der nächsten Seite werden die Einsatzmöglichkeiten für die Datenstruktur Array zusammengesetzt.

Tabelle 9.1 Array-Datenstrukturen in neuronalen Netzen

Architektur	Array-Anwendung
Perzeptron	▪ Eingabe- und Ausgabeschicht als je eindimensionales Array ▪ Zweidimensionales Array zur Speicherung der Verbindungsgewichte: `double weight[nInput][nOutput]`
Mehrschichtige vorwärts gerichtete Netze	▪ Eindimensionales Array für jede Schicht ▪ Ein Element des Array ist ein Objekt vom Typ Neuron mit mehreren Komponenten: Aktivierung, Verbindungen zu Vorgänger-Neuronen ▪ Eventuell je Neuron ein eindimensionales Array mit allen Verbindungen von den Vorgänger-Neuronen zum aktuellen Neuron

Selbstorganisierende Karte	▪ Zweidimensionales Array für die Neuronen der Kartenschicht
	▪ Jedes Neuron enthält die Aktivierung, seinen Abstand zum Eingabemuster sowie einen Vektor in der Länge der Eingabe, zur Verwaltung der Verbindungsgewichte von jedem Eingabe-Neuron zu diesem Neuron
	`double act;`
	`double dist;`
	`double[] weight;`

Hopfield-Netz, Boltzmann-Maschine	▪ Mehrdimensionales Array zur Verwaltung der Neuronen, da wie bei der Kohonen-Karte die Position des Neurons eine Rolle spielt
	`double[ ][ ] hopfield;`
	▪ Die Gewichte eines solchen Netzes sind dann in einem entsprechend doppelt dimensionierten Array zu realisieren:
	`double [ ][ ][ ][ ] weight;`
	Das Gewicht der Verbindung vom Neuron mit den Koordinaten (i,j) zum Neuron (x,y) ist somit:
	`weight[i][j][x][y]`

Neuronales Gas	▪ Einfaches Array für alle Neuronen. Verbindungsgewichte benutzt dieses Netz nicht

9.3.2 Der objektorientierte Ansatz

Insbesondere für sich verändernde Netztopologien oder schwach besetzte Verbindungsmatrizen sind dynamische Datenstrukturen zu bevorzugen.

Die zwar schon ältere Pascal-Toolbox für neuronale Netze [Kru91] basiert vollständig auf dynamischen Datenstrukturen. In Java werden derartige Strukturen unter Nutzung des Klassenkonzeptes aufgebaut. Eine Mischung aus Objektstrukturen und Arraystrukturen ist für viele Fälle eine sinnvolle Lösung.

Betrachtet man die zu lösenden Aufgaben, so kann eine Unterteilung in mehrere Teilaufgaben vorgenommen werden:

1. Aufbau eines neuronalen Netzes
2. Training eines Netzes
3. Anwendung

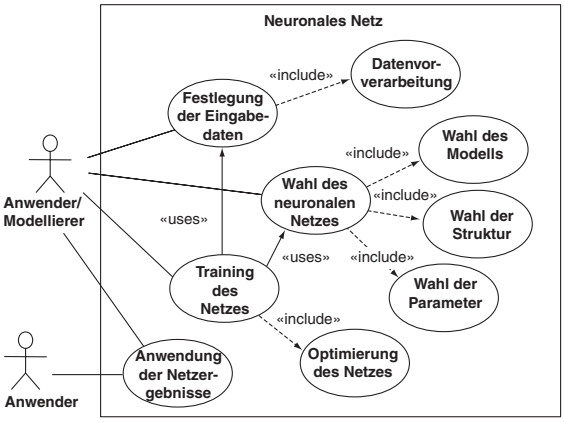


Bild 9.6 Use-Case-Diagramm für die Arbeit mit neuronalen Netzen

Eine Realisierung dieser Teilaufgaben als eigenständige Klassen ermöglicht eine flexible Verwendung der Komponenten. Die Netzkomponenten können nach erfolgtem Training direkt in eine Anwendung integriert werden, ohne dass das Training dann noch eine Rolle spielt. Neuronale Netz-Komponente sowie auch die Trainingskomponente können in unterschiedliche Anwendungen integriert werden. Diese Strukturierung spiegelt sich im Klassenkonzept Bild 9.7 wider.

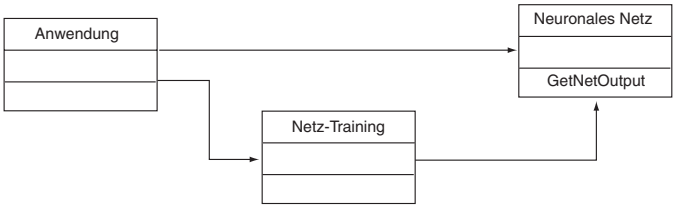


Bild 9.7 Klassenmodell einer Anwendung

Sinnvoll zeigt sich eine derartige Struktur zum Beispiel bei einer Applet-Entwicklung. Dabei ist es vorteilhaft, noch zwischen der eigentlichen Klasse zum Aufbau eines Applets und einer Klasse zur Darstellung des Netzes zu unterscheiden. Da eine selbstorganisierende Karte sich sehr gut visualisieren lässt, greifen wir auf dieses Beispiel zurück und geben die Klassenstruktur hier an:

```
public class SOMDemo
  extends     Applet
  implements  ActionListener {
  SOMDraw     area;
  SOM         som;
  ...
  }//SOMDemo
```

```
class SOMDraw
  extends Canvas {
  SOM som;
  ...
  }//SOMDraw

class SOM {
  Neuron map[][];  // Die zweidimensionale Neuronen-Karte
  ...
  }//SOM

class Neuron {
  float wx,wy;     // Gewichte des Neurons zur Eingabe
  float dist2inp;  // Distanz zur Eingabe
  ...
  }//Neuron
```

Da es sich hier um eine Demonstration der Anpassung einer selbstorganisierenden Karte handelt, wurde der Trainingsprozess in die Klasse SOM integriert.

Für ein vorwärts gerichtetes mehrschichtiges neuronales Netz ist die Struktur der Schichten in einer Implementation mit zu realisieren. Ein derartiges Netz besteht aus zwei oder mehreren Schichten von Neuronen. Jede Schicht kann prinzipiell beliebig viele Neuronen enthalten, die wiederum beliebig viele Verbindungen mit anderen Neuronen eingehen können. Ein Link ist dann eine Verbindung zu genau einem anderen Neuron.

Das UML-Klassendiagramm in Bild 9.8 zeigt einen möglichen Entwurf. Dabei werden einige wesentliche Attribute und Methoden angegeben, auf die detaillierte Angabe von Parametern und Typen wird verzichtet.

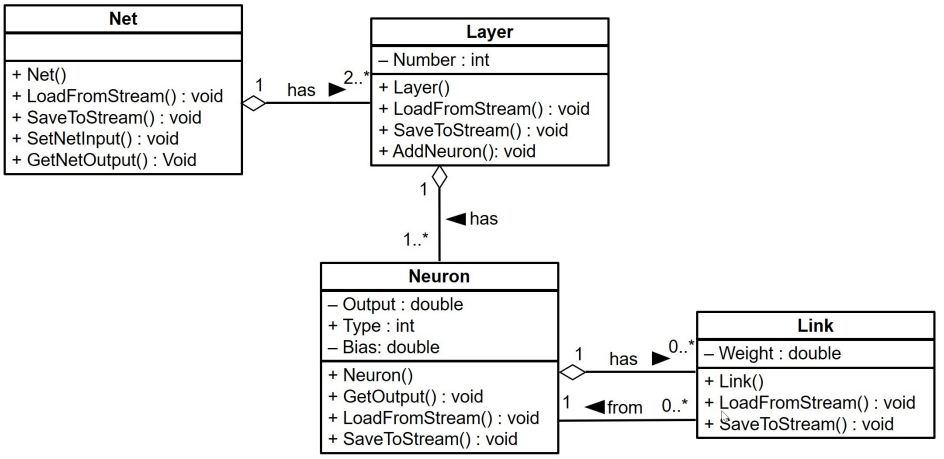


Bild 9.8 Klassendiagramm für ein mehrschichtiges vorwärts gerichtetes Netz

Zum Einstieg in die Implementation neuronaler Netze wird eine Implementation eines einfachen Perzeptrons gegeben. Es wird auf der angegebenen Klassenstruktur aufgebaut.

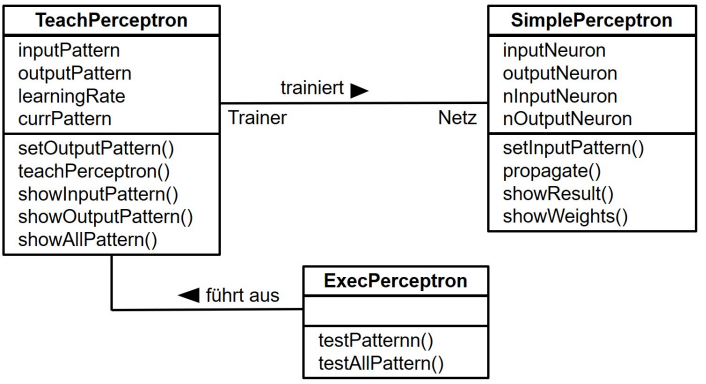


Bild 9.9 Das Klassenmodell einer Perzeptron-Anwendung

Das Klassenmodell aus Bild 9.9 ist ein Analysemodell und enthält noch keine genaueren Angaben über die Parameter der Methoden. Auch die Sichtbarkeitsattribute wie public oder private sind aus dem Modell noch nicht ersichtlich.

Die Klasse *SimplePerceptron* definiert den Aufbau und die Operationen, die für die Arbeit eines Perzeptrons notwendig sind. Die Komponenten eines Perzeptrons werden in einfacher Weise mittels Array-Strukturen realisiert. Das ist für einfache Beispiele mit einer recht festen Struktur durchaus angemessen und ausreichend. Die Gewichtsmatrix ist bis auf die Diagonale voll besetzt, falls von einem üblichen Perzeptron mit voller Vernetzung der Eingabe- mit der Ausgabeschicht ausgegangen wird.

```
/**
* Ein Perzeptron - sehr einfach implementiert
*
* benutzt von: TeachPerzeptron, ExecPerzeptron
*
* @author Uwe Lämmel
*
* @version 30.10.2019
*/
class SimplePerceptron {
  private int          nInputNeuron;   // Zahl der Eingabe-Neuronen
  private int          nOutputNeuron;  // Zahl der Ausgabe-Neuronen
  private int          nNeuron;        // Gesamtzahl der Neuronen
  private double[]     inputNeuron;    // Eingabe-Schicht
  private double[]     outputNeuron;   // Ausgabe-Schicht
  private double[][]   weight;         // Gewichtsmatrix
  private double       bias;           // Schwellwert
```

```
//-- Konstruktor mit Parametern -----------------------------
  /**
    * Konstruktor zum Aufbau eines Perzeptrons bestimmter Größe
    * @param nInp       Anzahl Eingabe-Neuron
    * @param nOut       Anzahl Ausgabe-Neuron
    * @param actBias    Schwellwert
  */
public SimplePerceptron(int nInp, int nOut, double actBias) {
  nInputNeuron  = nInp;
  nOutputNeuron = nOut;
  nNeuron       = nInputNeuron+nOutputNeuron;
  inputNeuron   = new double[nInputNeuron];
  outputNeuron  = new double[nOutputNeuron];
  weight        = new double[nOutputNeuron][nInputNeuron];
  bias          = actBias;

  for (int i=0;i<nOutputNeuron;i++)
    for (int j=0;j <nInputNeuron;j++) weight[i][j]=0.0;
}//Perceptron

// Konstruktoren mit Standardwerten:
public SimplePerceptron(int nInp, int nOut) { this(nInp,nOut,0.5);}
public SimplePerceptron()                   { this(4,10,0.5);}

//-- Zugriffsmethoden ------------------------------------------
public int numberOfInputNeurons()     { return nInputNeuron; }
public int numberOfOutputNeurons()    { return nOutputNeuron; }
public double getOutputNeuron(int i)  { return outputNeuron[i]; }

public double getInputNeuron(int i)   { return inputNeuron[i]; }
public double getWeight(int i, int j) { return weight[i][j]; }

public void setWeight(int i, int j, double value) { weight[i][j] = value; }

public void setInputNeuron(int i, double value) {
  inputNeuron[i]=value;
}//setInputNeuron

public void setOutputNeuron(int i, double value) {
  outputNeuron[i]=value;
}//setOutputNeuron

//-- setInputPattern ----------------------------------------
public void setInputPattern(double[] pat) {
  for (int i=0;i<nInputNeuron;i++) inputNeuron[i] = pat[i];
}//setInputPattern
```

```
//-- propagate: Bestimmung des Ergebnisses ------------------
public void propagate() {
  for (int i=0;i<nOutputNeuron;i++) {//für Ausgabe-Neuronen
    // bestimme Netz-Eingabe
    double netinp =0.0;
    for (int j=0;j<nInputNeuron;j++)
      netinp = netinp + weight[i][j] * inputNeuron[j];
    // bestimme Aktivierung=Ausgabe des Ausgabe-Neurons
    if (netinp>=bias) outputNeuron[i] = 1.0;
        else outputNeuron[i] = 0.0;
  }//for
}//propagate

//-- Ausgabe-Methode ------------------------------------
public void showOutput(){
  LineIO io = new LineIO(); // Klasse LineIO siehe WWW-Seiten
  io.write("{ ");
  for(int i=0;i<nOutputNeuron;i++){
    io.write(outputNeuron[i],5,2);
  }
  io.writeln("}");
}//showOutput

}//SimplePerceptron
```

In der Klasse *TeachPerceptron* werden der Umgang mit den Trainingsmustern und der Trainingsprozess selbst, hier unter Nutzung der Delta-Regel, beschrieben. Stark vereinfacht wird in dem Beispiel die Menge der Trainingsmuster direkt als Array im Speicher vordefiniert. Nachdem erste Tests erfolgreich durchgeführt wurden, ist unbedingt die Verwaltung von Trainingsmustern auf Dateien zu integrieren.

```
/**
* Ein Perzeptron - der Lernalgorithmus
*
* benoetigt:   SimplePerceptron
* benutzt von: ExecPerceptron
*
* @author Uwe Lämmel
* @version 30.10.2019
*/
public class TeachPerceptron {
  private SimplePerceptron p;             // Perzeptron, das trainiert wird
  private double learningRate;            // Lernfaktor
  private int    nPattern;                // Anzahl der Muster
```

```
  private double[][] inputPattern = {     // Eingabe-Muster vordefiniert
                               {0,0,0,0}, // Ziffer 0
                               {0,0,0,1}, // Ziffer 1
                               {0,0,1,0}, // Ziffer 2
                               {0,0,1,1}, // Ziffer 3
                               ...
                               {1,0,0,1}  // Ziffer 9
                                    };

  private double[][] outputPattern = {    // Ausgabe-Muster vordefieniert
                               {1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}, // Ziffer 0
                               {0,1,0,0,0,0,0,0,0,0}, // Ziffer 1
                               {0,0,1,0,0,0,0,0,0,0}, // Ziffer 2
                               {0,0,0,1,0,0,0,0,0,0}, // Ziffer 3
                               ...
                               {0,0,0,0,0,0,0,0,0,1} // Ziffer 9
                                     };

/**
  * Konstruktor zum Aufbau eines Trainingsprozesses
  * @param nInp     Anzahl Eingabe-Neuron
  * @param nOut     Anzahl Ausgabe-Neuron
  * @param bias     Schwellwert
  * @param learn    Lernfaktor für das Training
  */
  public TeachPerceptron(int nInp, int nOut, double bias, double learn) {
    p                 = new SimplePerceptron(nInp, nOut,bias);
    nPattern          = inputPattern.length;
    learningRate      = learn;
    if (nPattern>outputPattern.length)
      System.out.println(" FEHLER: "+
      "Ungleiche Anzahl von Eingabe- und Ausgabe-Mustern!");
  }//TeachPerceptron

  //-- Konstruktoren für den Standardfall
  public TeachPerceptron(){ this(4,10,0.5,0.2);}

  //-- setOutputPattern ------------------------------------
  public void setOutputPattern(double[] pat) {
    for (int i=0;i<p.numberOfOutputNeurons();i++)
      p.setOutputNeuron(i,pat[i]);
  }//setOutputPattern

//-- numberOfPatterns ------------------------------------
  public int numberOfPatterns(){ return nPattern; }
```

```
//-- getInputPattern ---------------------------------------
  public double[] getInputPattern(int i){
    double[] pat = new double[p.numberOfInputNeurons()];
    if (i>=0 && i<nPattern) {
      for(int j=0;j<p.numberOfInputNeurons();j++)
        pat[j] = inputPattern[i][j];
    }//if
    return pat;
  }//getInputPattern

  //-- getTrainedPerceptron liefert das trainierte Perzeptron
  public SimplePerceptron getTrainedPerceptron(){ return p;}

  //-- getOutputPattern --------------------------------------
  public double[] getOutputPattern(int i){
    double[] pat = new double[p.numberOfOutputNeurons()];
    if (i>=0 && i<nPattern) {
      for(int j=0;j<p.numberOfOutputNeurons();j++){
        pat[j] = outputPattern[i][j];
      }//for
    }//if
    return pat;
  }//getOutputPattern

  //-- teachPerceptron: N-maliges Trainieren aller Muster------
  public void teachPerceptron(int N) {
    for (int k=0; k<N;k++) { // N-maliges Trainieren
      for (int m=0;m<nPattern;m++) {
        p.setInputPattern(inputPattern[m]);
        p.propagate();
        //-- Vergleiche Ausgabe von Perzeptron p mit Muster
        //-- Falls ungleich: Anpassen der Gewichte
        for (int j=0;j<p.numberOfOutputNeurons();j++)
          if (p.getOutputNeuron(j)!= outputPattern[m][j])
            // Delta-Regel: Für alle Input-Neuronen:
            // Anpassung der Gewichte von Input i zu Output j
            for (int i=0;i<p.numberOfInputNeurons();i++) {
              p.setWeight(j,i, p.getWeight(j,i)
                      + learningRate
                      * p.getInputNeuron(i)
                     * (outputPattern[m][j] - p.getOutputNeuron(j)));
            }//for i
      }//for m
    }//for k
  }//teachPerceptron
```

```
  //-- Ausgabe-Methoden ------------------------------------------
  public void showAllPattern(){
    LineIO io = new LineIO();
    io.writeln("Alle Muster:");
    for(int i=0;i<nPattern;i++){showPattern(i);}
  }//showAllPattern

  public void showPattern(int i){
    LineIO io = new LineIO();   // Klasse LineIO siehe WWW-Seiten
    io.write((i+1)+". : { ");
    for(int j=0;j< p.numberOfInputNeurons();j++)
      io.write(inputPattern[i][j]+" ");
    io.write("}  --> { ");
    for(int j=0;j< p.numberOfOutputNeurons();j++)
      io.write(outputPattern[i][j]+" ");
    io.writeln("} ");
  }//showPattern
}//TeachPerceptron
```

Die Klasse ExecPerceptron dient als Anwendungsklasse. Alle Muster werden angezeigt, die Reaktion des untrainierten Netzes getestet, das Netz trainiert und alle Muster erneut getestet.

```
/**
 * Ausführung und Test der Klasse TeachPerceptron
 * @author Uwe Lämmel
 * @version 30.10.2019
 */
public class ExecPerceptron {
  static double testPattern(TeachPerceptron t, int n){
    LineIO io = new LineIO();
    double sse = 0.0;
    double err;
    double[] teach = t.getOutputPattern(n);
    SimplePerceptron p = t.getTrainedPerceptron();
    p.setInputPattern(t.getInputPattern(n));
    p.propagate();
    t.showPattern(n);
    p.showOutput();
    for(int i=0;i<p.numberOfOutputNeurons();i++){
      err = teach[i]-p.getOutputNeuron(i);
      sse = sse+err*err;
    }//for
    io.writeln("  Fehler="+sse);
    return sse;
  }//testPattern
```

```
  static void testAllPattern(TeachPerceptron t){
    double sse=0.0; // Aufsummierter quadratischer Fehler
    for(int i=0;i<t.numberOfPatterns();i++){
      sse=sse+testPattern(t,i);
    }//for
    System.out.println("Gesamtfehler = "+sse);
  }//testAllPattern

//-- Hauptprogramm MAIN -----------------------------------
  public static void main(String[] args) {
    TeachPerceptron t = new TeachPerceptron();
    t.showAllPattern();
    testAllPattern(t);
    t.teachPerceptron(8);
    testAllPattern(t);
  }//main
}//ExecPerceptron
```

Das Beispiel Perzeptron ist auf den WWW-Seiten zum Buch vorhanden und kann für eigene Versuche benutzt werden.

Übung 9.1 Ausgabe-Methoden

Entwickeln Sie einfache Varianten für die fehlenden Methoden zur Ausgabe der Werte. Die Ausgabe kann auf die Standard-Ausgabe erfolgen.

Übung 9.2 Trainingsdaten

Erweitern Sie die Klasse *TeachPerceptron* um die Verwaltung von Trainingsdaten auf Textdateien.

Übung 9.3 Neuronales Gas

Implementieren Sie ein neuronales Gas mit zum Beispiel 50 Neuronen, das einen zweidimensionalen rechteckigen Datenbereich abdeckt, und trainieren Sie es entsprechend.

9.4 Implementieren mit TensorFlow

TensorFlow[1] ist eine von Google bereitgestellte Programmbibliothek für die Implementierung künstlicher neuronaler Netze, vgl. [Goo19]. Wir werden hier ein vorwärts gerichtetes neuronales Netz mit Hilfe von TensorFlow implementieren und nutzen dazu die Plattform *Anaconda*, um dort mit der interaktiven, webbasierten Python-Entwicklungsumgebung Jupiter Notebook zu arbeiten. Installieren Sie zuerst *Anaconda* und dann *TensorFlow*. Anleitungen hierzu finden sich im Internet, die den Vorteil aufweisen, dass sie auf die aktuellen Versionen Bezug nehmen. Hinweise dazu stellen wir auf den Web-Seiten zum Buch bereit.

Als Beispiel benutzen wir einen Satz Großbuchstaben, der den Font-Daten aus dem JavaNNS-Beispielen entstammt. Die Buchstaben sind als 24x24-Pixelmatrix codiert, siehe Abbildung 9.10.

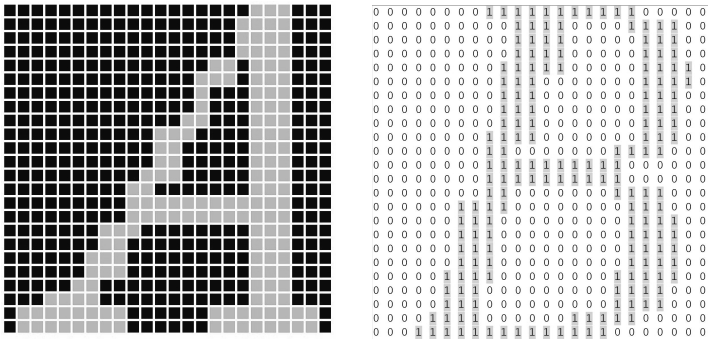


Bild 9.10 Links das A als 0-1-Pixelmuster im JavaNNS, rechts als Zahlen in einem Text-File

Die Zeichen liegen, wie in der Abbildung 9.10 rechts zu sehen, als Text-Datei vor. Die Eingabe ist nicht flexibel, die Text-Datei muss genau den Vorgaben entsprechen: Leerzeilen oder Kommentarzeilen mit dem '#' genau am Zeilenanfang, die Muster gemäß ihrer Dimension zeilenweise gespeichert und durch genau eine Kommentarzeile getrennt. Für unser kleines Beispiel ist dies aber schnell erledigt. Die Text-Datei wird zeilenweise eingelesen und mittels der recht praktischen Funktion *split* in eine Liste von Werten umgewandelt. Eine Kopie dieser Liste der Eingabezeile wird an die Liste der Trainingsmuster *X_train* angehängt. Um Leer- oder Kommentarzeilen am Datei-Anfang zu ignorieren, wird der Schalter *header* genutzt.

Die Funktion *load_input_pattern* wird dann ebenso dafür genutzt, die Klassen der Muster, die Trainingsausgaben, einzulesen. Im Beispiel wird von einer Ausgabe-Schicht von 26 Neuronen ausgegangen, je ein Neuron für eine Klasse. Eine Klasse besteht aus der Menge aller Bilder, die einem bestimmten Buchstaben, zum Beispiel B zugeordnet werden. Der Buchstabe B ist wie folgt codiert:

B: 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Der Name der Funktion zum Bereitstellen der Daten *load_dataset()* entspricht der Bezeichnung, wie diese von der Keras-Bibliothek für die Arbeit mit den Datensätzen verwendet wird.

[1] TensorFlow, das TensorFlow-Logo und alle zugehörigen Marken sind Marken von Google Inc..

```
## Einlesen der Daten aus den Dateien letters_train.txt und letters_class.txt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

# Einlesen von binaeren Muster-Dateien
# Vereinfacht wird davon ausgegangen, dass die Muster durch eine Leerzeile
# oder eine Zeile mit '#' am Zeilenanfang voneinander getrennt sind
#
# Leerzeilen und #-Zeilen am Dateianfang werden überlesen

def load_input_pattern(filename):
    with open(filename,"r") as inpfile:
        X_train = []
        x=[]
        header = True # Flag zum Ueberlesen der Kopfzeilen
        for line in inpfile:
            line = line.strip()
            if len(line)==0 or line[0]=='#':
                if not header:
                    X_train.append(x.copy())
                    x=[]
            else: # naechste Zeile eines Musters einlesen und anhaengen
                header = False
                z = line.split(" ")
                x.append(z.copy())
    inpfile.close()
    return X_train

# Laden der Letter-Daten zum Trainieren und Testen
def load_dataset():
    X_train = load_input_pattern("letters24x24_train.txt")
    X_test  = load_input_pattern("letters24x24_test.txt")

    with open("letters24x24_label.txt","r") as inpfile:
        y_train = []
        for line in inpfile:
            line = line.strip()
            if not(len(line)==0 or line[0]=='#'):
                z = line.split(" ")
                y_train.append(z.copy())
    inpfile.close()
    return (X_train, y_train, X_test, y_train)
# Ende der Definition
```

Für die Entwicklung eines künstlichen neuronalen Netzes werden vier Datensätze benötigt und durch *load_dataset()* bereitgestellt:

1. *X_train*: Die Trainingsmuster, hier bestehend aus 0-1-Buchstaben-Bildern der Größe 24x24 Pixel.
2. *y_train*: Die Klassenzugehörigkeit der Trainingsmuster. Mitunter werden diese Daten auch *label* genannt.
3. *X_test*: Die Menge der Daten zum Testen der Qualität des Trainings beziehungsweise der Qualität des neuronalen Netzes. Im Beispiel setzen wir wieder einen Satz Buchstaben ein, wobei aber alle Pixelbilder mit dem Faktor 10% verrauscht wurden.
4. *y_test*: Die Klassenzugehörigkeit der Testbilder. Da *X_test* dieselben Buchstaben wie *X_train* enthält, wird für *y_test* ebenso die Liste *y_train* eingesetzt.

Durch das Einlesen aus den Text-Dateien sind Listen von Zeichenketten entstanden. Um mit numerischen Werten arbeiten und die vielen Möglichkeiten der Python-Bibliothek *numpy* nutzen zu können, werden die Listen in *numpy*-Arrays und dabei die Werte in Fließkommazahlen (*float*) umgewandelt.

Mit der Eigenschaft *shape* eines numpy-Arrays lässt sich die Dimension eines Arrays ermitteln. Wir drucken diese Information sowohl für die Trainingsdaten als auch die Klassen der Trainingsdaten aus. Die Trainingsdaten bestehen aus 26 Einträgen, wobei jedes Element 24 Reihen mit 24 Elementen aufweist. Die Klassenzugehörigkeiten bestehen ebenso aus 26 Einträgen und hier besteht jeder Eintrag aus 26 Werten, die die Zugehörigkeit zu einer Buchstabenklasse repräsentieren. Das Codierungsprinzip wird *One-Hot-Encoding* genannt: Genau ein Neuron ist aktiviert (1), alle anderen 0 oder -1.

```
# Einlesen der Daten-Mengen
# und Umwandlung der Python-Listen in numpy-Arrays

(X_train,y_train, X_test, y_test) = load_dataset()

X_train = np.array(X_train).astype(float)
y_train = np.array(y_train).astype(float)
X_test  = np.array(X_test).astype(float)
y_test  = np.array(y_test).astype(float)

## Ausgabe der Dimensionen der Mengen
print(X_train.shape, y_train.shape)
```

```
(26, 24, 24) (26, 26)
```

Die Bibliothek *matplotlib* ermöglicht es uns, auf einfache Art und Weise ein zweidimensionales Array als Pixelmuster auszugeben. Hierzu wird zuerst per Zufall ein Index ermittelt, in unserem Fall ist dies die 14. Dieser Index wird zusammen mit dem 14. Ausgabe-Muster ausgegeben und das entsprechende Zeichen, hier der verrauschte Buchstabe O der Test-Menge, visualisiert:

```
## Visualisieren eines Musters oder seines verrauschten Testmuster
import random
rand =  random.randint(0,len(X_train)-1)
print(rand,y_train[rand])
# plt.imshow(X_train[rand], cmap="Greys");
plt.imshow(X_test[rand],cmap="Greys")
```

```
14
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
```

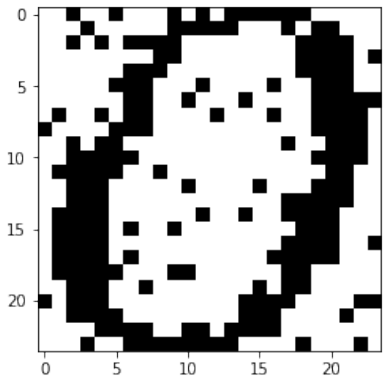


Bild 9.11 Das 14. Element der Test-Menge, der verrauschte Buchstabe O

Anhand der Bilder 9.10 und der Ausgabe der Klassifikation für das verrauschte O ist die Architektur des neuronalen Netzes teilweise bestimmt:

- Die Eingabe-Schicht besteht aus $24x24 = 576$ Neuronen.
- Die Ausgabe-Schicht enthält 26 Neuronen, für jeden Buchstaben ein Neuron. Erkennt das Netz einen Buchstaben, wird nur genau dieses eine zugehörige Neuron in der Ausgabe-Schicht aktiviert.
- Anzahl und Größe der Zwischen- oder verdeckten Schichten sind noch festzulegen.

Die 2-dimensional vorliegenden Eingaben werden linearisiert. Die Anzahl der Muster und deren Dimension werden noch einmal ausgegeben, die Daten haben nun die für die Verarbeitung notwendige Form:

```
# Reduktion der Dimension der Muster von 24x24 auf 1x576
X_train = X_train.reshape((X_train.shape[0],X_train.shape[1]*X_train.shape[2]))
X_test = X_test.reshape((X_test.shape[0],X_test.shape[1]*X_test.shape[2]))
# Ausgabe der Dimensionen der Mengen
print('Dimension Trainingsmenge :', X_train.shape)
print('Dimension Testmenge      :', X_test.shape)
print('Anzahl Klassen Trainingsmenge:', y_train.shape)
print('Anzahl Klassen Testmenge     :', y_test.shape)
```

```
Dimension Trainingsmenge : (26, 576)
Dimension Testmenge      : (26, 576)
Anzahl Klassen Trainingsmenge: (26, 26)
Anzahl Klassen Testmenge     : (26, 26)
```

Nun beginnt die eigentliche Arbeit mit der Bibliothek TensorFlow. Dazu wird die Bibliothek importiert und eine TensorFlow-Session gestartet.

```
# Import der benoetigten Bibliotheken
import tensorflow as tf
from sklearn.metrics import roc_auc_score, accuracy_score
# Starten einer TensorFlow-Session
s = tf.InteractiveSession()
```

Wie bereits beschrieben, geben die Datensätze schon die Architektur des zu entwickelnden vorwärtsgerichteten neuronalen Netzen zum großen Teil vor. Diese Werte nun werden direkt aus den Informationen zu den Datensätzen übernommen. Einzig die Größe der verdeckten Schicht wird manuell auf 20 festgelegt. In diesem Beispiel belassen wir es bei einer verdeckten Schicht.

```
# Festlegen der Parameter für das neuronale Netz: 576 > 20 > 26
nr_classes = y_train.shape[1]  # Anzahl der Klassen = Anzahl Buchstaben
nr_input_neurons = X_train.shape[1] # Groesse der Eingabe-Schicht
nr_output = y_train.shape[1] # Groesse der Ausgabe-Schicht
nr_hidden_1 = 20 # Groesse der verdeckten Schicht
# Platzhalter sind Variable, die spaeter einen Wert bekommen
input_X = tf.placeholder('float32',shape=(None,nr_input_neurons),name="input_X")
input_y = tf.placeholder('float32',shape = (None,nr_classes),name='input_Y')
```

Mit dem Festlegen der Gewichtsmatrizen wird die Architektur des Netzes bestimmt. Da wir es hier mit drei Neuronen-Schichten zu tun haben, sind es zwei trainierbare Schichten von Gewichten zwischen den Neuronen-Schichten: *weights_0, weights_1*. Die Schwellwerte werden wie Gewichte betrachtet und in gleicher Weise initialisiert: *bias_0, bias_1*.

```
# Gewichte werden zufaellig initialisiert
weights_0 = tf.Variable(
    tf.random_normal([nr_input_neurons,nr_hidden_1],
                     stddev=(1/tf.sqrt(float(nr_input_neurons)))))
bias_0 = tf.Variable(tf.random_normal([nr_hidden_1]))
weights_1 = tf.Variable(
    tf.random_normal([nr_hidden_1,nr_output],
                     stddev=(1/tf.sqrt(float(nr_hidden_1)))))
bias_1 = tf.Variable(tf.random_normal([nr_output]))
```

Es wird festgelegt, in welcher Weise die Aktivitäten der Neuronen berechnet werden. Hier setzen wir zum einen die RelU- und zum anderen die logistische Aktivierungsfunktion ein. Diese ist in der TensorFlow-Bibliothek als tf.sigmoid() realisiert.

```
# Berechnen der Aktivierungen der Neuronen
hidden_output_0 = tf.nn.relu(tf.matmul(input_X,weights_0)+bias_0)
predicted_y = tf.sigmoid(tf.matmul(hidden_output_0,weights_1) + bias_1)
```

Die berechneten Aktivierungen der Ausgabe-Neuronen werden zu einer Vorhersage der Buchstaben-Klasse für die Eingabe herangezogen. Das softmax-Prinzip wird eingesetzt. Die berechneten Aktivierungen der Ausgabe-Neuronen werden normalisiert und die Klasse mit

dem höchsten Wert wird vorhergesagt. Daraus kann nun ein Fehler berechnet werden, der reduziert werden muss.

```
# Definieren der Fehlerfunktion:
# Die Aktivierungen der Ausgabe-Schicht werden normalisiert
#                    und eine Klasse zugeordnet
loss = tf.reduce_mean(
  tf.nn.softmax_cross_entropy_with_logits_v2(logits=predicted_y,labels=input_y))
```

Für das Lernen oder Trainieren ist nun der entsprechenden Lernalgorithmus auszuwählen und die Lernrate festzulegen. Der *Adam*-Algorithmus (*adaptive moment estimation*) wurde 2015 von Kingma und Lei Ba entwickelt und ist seitdem recht recht populär. Die Mathematik zum Verfahren kann in [KL15] nachgelesen werden.

```
# Lernrate und Lernalgorithmus festlegen
learning_rate =  0.01
## Es wird der Adam-Algorithmus zum Anpassen der Gewichte eingesetzt
learner = tf.train.AdamOptimizer(learning_rate
            ).minimize(loss, var_list=[weights_0,weights_1, bias_0,bias_1])
```

Bevor das Training des Netzes beginnen kann, werden noch die Berechnungen für die Güte oder Qualität des Netzes definiert. Die Güte ergibt sich aus dem Vergleich der gewünschten Klassifizierungen, die in *y_train* gegeben sind, mit den berechneten Vorhersagen des Netzes *predicted_y*.

```
# Bestimmen der Guete des Ergebnisses
correct_prediction = tf.equal(tf.argmax(y_train,1), tf.argmax(predicted_y,1))
accuracy = tf.reduce_mean(tf.cast(correct_prediction, tf.float32))
```

Endlich ist ein Zustand erreicht, in dem nun das Training beginnen kann. Dazu wird am Anfang noch die Anzahl der Trainingszyklen festgelegt und Datenstrukturen angelegt, in denen die erreichten Zwischenstände abgespeichert werden können. In der *TensorFlow*-Session *s* werden die Variablen initialisiert und dann in jedem Schleifendurchlauf ein Trainingslauf mittels *run* durchgeführt. Die Ergebnisse werden nach jedem Schleifendurchlauf ausgedruckt, so dass der Lernerfolg schon einmal geprüft werden kann.

```
# Parameter fuer das Training
batch_size = 128
train_cycles = 20
train_guete = []
train_error = []
test_guete = []
s.run(tf.global_variables_initializer())

# Trainieren und Speichern der erreichten Guete
for cycle in range(train_cycles):
    arr = np.arange(X_train.shape[0])
    np.random.shuffle(arr)
```

```
    for index in range(0,X_train.shape[0],batch_size):
        s.run(learner, {input_X: X_train[arr[index:index+batch_size]],
                        input_y: y_train[arr[index:index+batch_size]]})
    train_guete.append(s.run(accuracy, feed_dict= {input_X:X_train,
                                                   input_y: y_train}))
    train_error.append(s.run(loss, {input_X: X_train, input_y: y_train}))

  # Evaluierung des Netzes durch Ausgabe der Werte:
    test_guete.append(accuracy_score(y_test.argmax(1),
                          s.run(predicted_y, {input_X: X_test}).argmax(1)))
    print("Zyklus:{0}, Train Error: {1:.2f} Train Guete: {2:.3f},
                                                   Test Guete:{3:.3f}"
      .format(cycle, train_error[cycle], train_guete[cycle], test_guete[cycle]))
```

```
Zyklus:0, Train Error: 3.17 Train Guete: 0.038, Test Guete:0.038
Zyklus:1, Train Error: 3.07 Train Guete: 0.038, Test Guete:0.038
Zyklus:2, Train Error: 2.98 Train Guete: 0.077, Test Guete:0.038
Zyklus:3, Train Error: 2.92 Train Guete: 0.154, Test Guete:0.038
Zyklus:4, Train Error: 2.87 Train Guete: 0.192, Test Guete:0.077
Zyklus:5, Train Error: 2.83 Train Guete: 0.231, Test Guete:0.077
Zyklus:6, Train Error: 2.79 Train Guete: 0.231, Test Guete:0.154
...
Zyklus:11, Train Error: 2.61 Train Guete: 0.538, Test Guete:0.231
Zyklus:12, Train Error: 2.57 Train Guete: 0.577, Test Guete:0.346
Zyklus:13, Train Error: 2.54 Train Guete: 0.692, Test Guete:0.577
Zyklus:14, Train Error: 2.50 Train Guete: 0.846, Test Guete:0.654
Zyklus:15, Train Error: 2.47 Train Guete: 0.885, Test Guete:0.808
...
Zyklus:18, Train Error: 2.42 Train Guete: 0.923, Test Guete:0.731
Zyklus:19, Train Error: 2.41 Train Guete: 0.923, Test Guete:0.769
```

Da die Werte für den Fehler und die Güte für jeden Trainingszyklus aufgesammelt werden, sind diese Werte nun für eine Visualisierung nutzbar. Wir erinnern uns, dass ganz am Anfang die Python-Bibliothek matplotlib.pyplot importiert und der Name *plt* vergeben wurde.

Die Kurve in Bild 9.12 zeigt einen typischen Verlauf des Trainings. Mit ein paar mehr Trainingszyklen lässt sich die Genauigkeit weiter erhöhen.

```
## Ausgabe der Erkennungsrate nach jedem Trainingszyklus
durchlaeufe = list(range(train_cycles))
plt.plot(durchlaeufe, train_guete, label='Train')
plt.plot(durchlaeufe, test_guete, label='Test')
plt.ylabel('Genauigkeit')
plt.xlabel('Zyklus')
plt.show()
print("Erkennungsrate auf der Trainingsmenge: {0:.2f}".format(train_guete[-1]))
print("Erkennungsrate auf der Testmenge:{0:.2f}".format(test_guete[-1]))
```

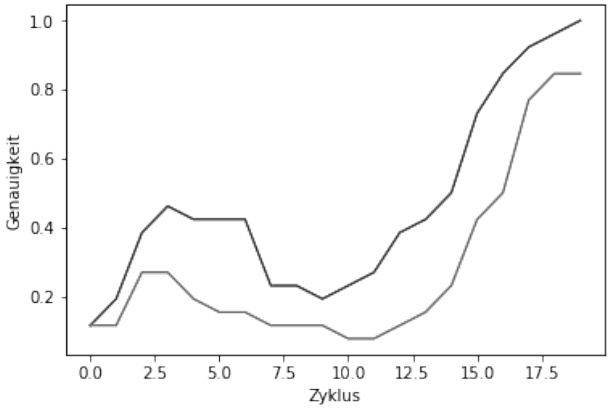


Bild 9.12 Entwicklung der Güte oder Genauigkeit des Netzes

```
Erkennungsrate auf der Trainingsmenge: 0.92
Erkennungsrate auf der Testmenge:0.77
```

Am Ende darf nicht vergessen werden, die TensorFlow-Session explizit zu beenden. Nur so können in einer neuen Sitzung weitere Experimente durchgeführt werden.

```
# Schließen der Sitzung
s.close()
```

Die Text-Dateien mit den Buchstaben-Mustern stehen auf den Seiten des Buches zum Herunterladen zur Verfügung.

Übung 9.4 Programmierumgebung

Installieren Sie Anaconda, Jupiter Notebook und TensorFlow und bauen Sie das Netz nach.

Übung 9.5 Lernrate

Verändern Sie die Lernrate oder die Anzahl der Trainingszyklen und beobachten Sie die Veränderungen.

Übung 9.6 Verrauschte Daten

Entwickeln Sie einen stärker verrauschten Datensatz und finden Sie heraus, ob das Netz diese Buchstaben immer noch erkennen kann.

Übung 9.7 Innere Schicht

Fügen Sie eine weitere innere Schicht ein. Was ist das Ergebnis?

Literatur

[Agg18] AGGARWAL, Charu C.: *Neural Networks and Deep Learning: A Textbook*. Cham: Springer International Publishing, 2018 http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-94463-0

[BCF88] BÖRINGER, Bernhard; CHIOPRIS, Carlo; FUTO, Ivan: *Wissensbasierte Systeme mit PROLOG*. Bonn: Addison-Wesley, 1988

[BHSA07] BOERSCH, Ingo; HEINSOHN, Jochen; SOCHER-AMBROSIUS, Rolf: *Wissensverarbeitung*. 2. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, 2007

[BKKN03] BORGELT, Christian; KLAWONN, Frank; KRUSE, Rudolf; NAUCK, Detlef: *Neuro-Fuzzy-Systeme: Von den Grundlagen künstlicher Neuronaler Netze zur Kopplung mit Fuzzy-Systemen*. 3. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2003 (Computational intelligence). http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-80336-8

[Bra01] BRATKO, Ivan: *Prolog Programming for Artificial Intelligence*. 3. Auflage. Amsterdam: Pearson Education, 2001

[Bro19] BROCKHAUS: *Logik*. https://brockhaus.de/ecs/enzy/article/logik-20. Version: 2019, Abruf: 12.12.2019

[Bus03] BUSINESS RULES GROUP ; BUSINESS RULES GROUP: *The Business Rules Manifesto*. http://businessrulesgroup.org/brmanifesto.htm. Version: 2003, Abruf: 12.12.2019

[CL16] CLEVE, Jürgen; LÄMMEL, Uwe: *Data Mining*. 2. Auflage. Berlin und Boston: De Gruyter Oldenbourg, 2016 (De Gruyter Studium)

[CM13] CLOCKSIN, William F.; MELLISH, Christopher S.: *Programmieren in Prolog*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013

[CS06] CLAUS, Volker; SCHWILL, Andreas: *Duden Informatik A - Z: Fachlexikon für Studium, Ausbildung und Beruf*. 4. Aufl. Mannheim: Dudenverl., 2006 (Duden)

[Dar70] DARRACH, Brad: Meet Shaky, the first electronic person. In: *Life Magazine* 69 (1970), Nr. 21, 68. https://books.google.de/books?id=2FMEAAAAMBAJ, Abruf: 10.12.2019

[DHN76] DUDA, Richard O.; HART, Peter E.; NILSSON, Nils J.: Subjective Bayesian Methods for Rule-based Inference Systems. In: *Proceedings of the June 7-10, 1976, National Computer Conference and Exposition*. New York, NY, USA: ACM, 1976 (AFIPS '76), S. 1075–1082

[Dud19] DUDEN: *Intelligenz*. 2019 https://www.duden.de/suchen/dudenonline/Intelligenz

[EHW19] EIBE, Frank; HALL, Mark H.; WITTEN, Ian H.: *WEKA*. https://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka. Version: 2019, Abruf: 23.08.2019

[Eur19] EUROPÄISCHE KOMMISSION: *Ethik-Leitlinien für eine vertrauenswürdige KI*. https://ec.europa.eu/digital-single-market/en/news/ethics-guidelines-trustworthy-ai. Version: 2019, Abruf: 06.09.2019

[EV18] EICHHOLZ, Wolfgang; VILKNER, Eberhard: *Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik*. 7. Auflage. München: Hanser, 2018

[Fel19] FELDEN, Carsten: Künstliche Intelligenz. https://www.enzyklopaedie-der-wirtschaftsinformatik.de/wi-enzyklopaedie/lexikon/technologien-methoden/KI-und-Softcomputing/Kunstliche-Intelligenz/, Abruf: 06.01.2020. In: GRONAU, Norbert; BECKER, Jörg; LEIMEISTER, Jan M.; OVERHAGE, Sven; SUHL, Leena (Hrsg.): *Enzyklopädie der Wirtschaftsinformatik – Online-Lexikon*. Berlin: GITO, 2019

[FHMV03] FAGIN, Ronald; HALPERN, Joseph Y.; MOSES, Yoram; VARDI, Moshe: *Reasoning About Knowledge*. Cambridge: MIT Press, 2003

[FR19] FREUND, Jakob; RÜCKER, Bernd: *Praxishandbuch BPMN – mit Einführung in DMN*. 6. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 2019

[Fri17] FRITZKE, Bernd: *DemoGNG: Simulator for competitive learning methods and self-organizing neural networks*. http://www.demogng.de. Version: 2017, Abruf: 06.01.2020

[Gin93] GINSBERG, Matt: *Essentials of Artificial Intelligence*. San Mateo: Morgan Kaufman Publ., 1993

[Gin12] GINSBERG, Matt: *Essentials of Artificial Intelligence*. London: Newnes, 2012

[Goo19] GOOGLE INC.: *TensorFlow – An end-to-end open source machine learning platform*. https://www.tensorflow.org. Version: 2019, Abruf: 20.08.2019

[GRS13] GÖRZ, G.; ROLLINGER, C.-R.; SCHMID, U. (Hrsg.): *Handbuch der Künstlichen Intelligenz*. Berlin: Walter de Gruyter, 2013

[HR92] HEINRICH, Lutz J.; ROITHMAYR, Friedrich: *Wirtschaftsinformatik-Lexikon*. 4. Auflage. 1992

[KL15] KINGMA, Diederik P.; LEI BA, Jimmy: Adam: A Method for Stochastic Optimization. In: BENGIO, Yoshua; LECUN, Yann (Hrsg.): *3rd International Conference on Learning Representations, ICLR 2015, San Diego, CA, USA, May 7-9, 2015, Conference Track Proceedings*, 2015

[KNI19] KNIME AG ; KNIME AG: *KNIME Deep Learning*. https://www.knime.com/deeplearning. Version: 2019, Abruf: 2019-08-14

[Kru91] KRUSE, Hilger: *Programmierung neuronaler Netze: Eine Turbo Pascal Toolbox*. 1. Aufl. Bonn: Addison-Wesley, 1991

[Lif19] LIFSCHITZ, Vladimir: *Answer Set Programming*. Singapore: Springer Nature, 2019

[LM98] LACKES, R.; MACK, D.: *Coomputer Based Training Program on Neural Networks*. Berlin, 1998

[Low97] LOWITSCH, C.: *Transformationen und Neuronale Netze zur Erkennung von KFZ-Kennzeichen und Datenfeldern: Diplomarbeit*. Wismar, 1997

[Mai18] MAIER, Günter: *Gabler Wirtschaftslexikon: Intelligenz*. https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/intelligenz-37696/version-261129. Version: 2018, Abruf: 10.09.2019

[Min75] MINSKY, Marvin: A Framework for Representing Knowledge. In: WINSTON, P.H. (Hrsg.): *The Psychology of Computer Vision*. New York: McGraw-Hill, 1975

[Möh18] MÖHRLE, Martin G. ; SPRINGER GABLER VERLAG: *Gabler Wirtschaftslexikon: Kreativität*. https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/kreativitaet-40039/version-263434. Version: 2018, Abruf: 10.09.2019

[Nil98] NILSSON, Nils J.: *Artifial Intelligence - A New Synthesis*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publ., 1998

[Paw16] PAWLIK, Kurt: Psychologische Intelligenzforschung. https://doi.org/10.1007/978-3-662-49912-2_6. In: BUCHMÜLLER, Wilfried; JAKOBEIT, Cord (Hrsg.): *Erkenntnis, Wissenschaft und Gesellschaft: Wie Forschung Wissen schafft*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016, 65-84

[Qui68] QUILLIAN, M. R.: Semantic Networks. In: MINSKY, Marvin L. (Hrsg.): *Semantic Information Processing*. MIT Press, 1968, S. 227–270

[Rap19] RAPIDMINER GMBH: *RapidMiner Documentation: Neural Net*. https://docs.rapidminer.com/latest/studio/operators/modeling/predictive/neural_nets/neural_net.html. Version: 2019, Abruf: 14.08.2019

[RN12] RUSSELL, Stuart; NORVIG, Peter: *Künstliche Intelligenz*. 3. Auflage. Pearson Education, 2012

[Sch86] SCHNUPP, Peter: *Prolog – Einführung in die Programmierpraxis*. München Wien: Carl Hanser Verlag, 1986

[Sch97] SCHERER, Andreas: *Neuronale Netze: Grundlagen und Anwendungen*. Braunschweig und Wiesbaden: Vieweg, 1997 (Computational intelligence)

[Sie18] SIEPERMANN, Markus: *Gabler Wirtschaftslexikon: Künstliche Intelligenz*. https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/kuenstliche-intelligenz-ki-40285/version-263673. Version: 2018, Abruf: 11.09.2019

[SLJ+15] SZEGEDY, Christian; LIU, Wei; JIA, Yangqing; SERMANET, Pierre; REED, Scott; ANGUELOV, Dragomir; ERHAN, Dumitru; VANHOUCKE, Vincent; RABINOVICH, Andrew: Going deeper with convolutions. In: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2015, 1–9

[SS94] STERLING, Leon; SHAPIRO, Ehud: *The Art of Prolog – Advanced Programming Techniques*. Cambridge: MIT Press, 1994

[Ste17] STERNBERG, Robert J.: *Encyclopædia Britannica: Human intelligence*. https://www.britannica.com/science/human-intelligence-psychology. Version: 2017, Abruf: 07.11.2019

[Tur50] TURING, Alan M.: Computing Machinery and Intelligence. In: *Mind* LIX (1950), Nr. 236, 433–460. https://doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433, Abruf: 10.09.2019

[Wal19] WALSH, Toby: *2062: Das Jahr, in dem die künstliche Intelligenz uns ebenbürtig sein wird*. München: Riva, 2019

[Zel97] ZELL, Andreas: *Simulation neuronaler Netze*. 2., unveränd. Nachdr. der Ausg. Bonn, Addison-Wesley 1994. München: Oldenbourg, 1997

Index

2/3-Regel 286

Ableitbarkeit 37
Acht-Damen-Problem 181
Adaline 195
Adaptive linear element 195
Adaptive Resonanz-Theorie 280, → ART-Netz
Ähnlichkeitsmaß 280, 281, 283
Aktionsregel 66
Aktivierung 192, 195, 206, 214, 217, 237, 268, 269
Aktivierungsfunktion 192, 215, 216, 234, 291, 302
Aktualität 77
Algorithmus 189
– Backpropagation- 212, 215, 218
– Boltzmann-Einschwingen- 303
– Delta-Regel-Lern- 206
– genetischer 244, 245
– neuronales Gas 275
– SOM-Lern- 268
– Wettbewerbslernen 261
Allgemeingültigkeit 32, 33, 53
Äquivalenz 29
– semantische 41
Artificial Intelligence 7
ART-Netz 261, 280
– Arbeitsweise 285
A*-Suche 133
Ausgabe 205, 206, 208, 211, 212, 214, 248, 262, 291
Ausgabefunktion 192, 214
Ausgabe-Neuron 205, 236, 242, 248, 250, 254
Ausgabeschicht 213, 289, 308, 311
Ausgangszustand 112
Aussage
– atomare 29
– unscharfe 62, 97
– unsichere 62, 88
– zusammengesetzte 29
Aussagenlogik 29
– Modell 33
Aussagenlogische Formel 30
Autoassoziatives Netz 289

Backpropagation 203, 211, 213, 222, 224, 249, 306
– Backpercolation 220
– mit Momentum 220
– Modifikation 219
– QuickProp 220, 224
– resilient 220, 224, 225, 242
Backpropagation-Netz 204, 211, 257, 306
Backtracking 73, 156, 173
Bayessche Formel 91
Bergsteiger-Heuristik 131
Bestensuche 132
Beweisverfahren
– Korrektheit 38
– Vollständigkeit 38
Bias → Schwellwert
Bilderkennung 252
Binäre Codierung 224
Boltzmann-Maschine 199, 300, 310
– Arbeitsweise 303
Breitensuche 118
Business Rules 18, 75

Calculus ratiocinator 17
Charakteristische Funktion 97
Chatbot 10, 19
Clusterung 280
CNN → Convolutional Neural Network
Codierung 208, 229, 233, 234, 236, 245, 255, 264
– binäre 232, 239, 240
Constraints 142, 187
Convolution 252

Convolutional Neural Network 252
Cut 174

Data Mining 233
Datenreduktion 229
Datenvorverarbeitung 228, 233
Delaunay-Triangulation 276
Delta-Regel 205
Dendrit 192
Denken 10, 16, 189

Eingabe-Neuron 230, 262, 269, 275
Eingabeschicht 203, 213, 265, 308, 311
Elman-Netz 250
Energie-Funktion 299
Energie-Niveau 289, 293, 296, 298–301
Erfüllbarkeit 32, 33, 53
Erinerungsvermögen 250
Erinnerung 248
Erkennung
– Muster- 290, 292
Erregungszentrum 263, 265, 268, 269
Expert system shell 27
Expertensystem 19, 26, 27, 65, 75

Fairness 123
Fakt 148, 153
Faktorisierung 57, 58
Falsifizierbarkeit 32, 33, 53
Faltung → Convolution
Faltungsschicht 253, 254
Fehler 211, 214, 242, 278
– mittlerer quadratischer 224
– Netz- 205, 244, 245
Fehlerfunktion 213
Fehlerkurve 212, 219, 225
Fehlersignal 215, 216
Formel
– aussagenlogische 30
– geschlossene 49
– prädikatenlogische 48
Frame 83
Funktion
– Ausgabe- 192
– berechenbare 204
– erlernbare 205
– Fitness- 245
– Identität 209
– logistische 196
– Mexican-Hat- 266
– Schwellwert- 205
– sigmoid 193
– Sinus- 230
– UND- 208, → UND-Funktion
– XOR- 207, 211
Fuzzy-Logik 103
Fuzzy-Menge 97
– Durchschnitt 100
– Komplement 102
– Teilmenge 100
– Vereinigung 102
Fuzzy-Regler 105

Gas
– neuronales 274
Generalisierungsfähigkeit 198, 225, 227–229, 240, 277
Geschlossene Formel 49
Gewicht 192, 199, 203, 205, 211, 214, 261, 265, 269, 275, 287, 290–292, 295, 298, 299, 310
– Verbindungs- 196
Gewichtsänderung 206, 212, 217, 219, 266
Gewichtsmatrix 217, 218, 282, 290, 292, 294, 296, 310, 325
Gewinner-Neuron 261, 265, 266, 268, 271, 276, 283, 286
Glockenkurve 267
Gradient 219
Gradientenabstiegsverfahren 212
Graph 112

Heuristik
– Bergsteiger 131
– Bestensuche 132
– des nächsten Nachbarn 130
Heuristische Suche 125
Hopfield-Netz 199, 289, 299, 310, 311
Horn-Klausel 60, 61, 147

Identität 209, 214
Imitation Game 8
Implikation 29
Inferenz 17

Inferenzregel 37, 53, 104
– Faktorisierung 58
– Fuzzy-Logik 104
– Modus ponens 53
– Modus tollens 37
– Resolution 38, 54
Informierte Suche 125
Inneres Neuron 211
Intelligenter Agent 10
Intelligenz 7, 9, 14
Interpretation 32, 52
Iterative Broadening 142
Iterative Deepening 125, 142

JavaNNS 191, 211, 220, 223, 236, 249, 283, 305, 307
Jordan-Netz 248

Karte
– selbstorganisierende 261
Keras 259
Keras-Bibliothek 321
Klassifizierung 222, 262, 264, 280
Klausel 40, 43, 148, 153
Klauselnormalform 40, 54
– konjunktive 40
KNF 40, 54
KNIME 305
Knobelaufgabe 15
Kohonen Feature Map → Selbstorganisierende Karte
Konjunktive Normalform 40, 54
Kontext-Neuron 248, 250
Konvergenz-Theorem 205
Korrektheit 38, 43, 58
Künstliche Intelligenz 7, 10, 11
– Black-Box- 21
– Geschichte 17
– symbolverarbeitende 14
– White-Box- 19
Kurvenverlauf
– Prognose 247

Leibnizsches Programm 17
Lernalgorithmus 326
Lernen 198, 205, 206, 212, 217, 236
– Delta-Regel 205
– nicht überwachtes 198, 262, 263
– Overfitting 241
– SOM- 268
– überwachtes 198
– Wettbewerbs- 200, 261
Lernfaktor 216, 225, 239, 267
Lernverfahren
– Batch- 213
– Online- 214
Linear Treshold Unit 195
Lingua characteristica 17
Listen in PROLOG 163, 165
Literal 40, 153
Loebner Prize 8
Logik 28
Logische Interpretation 162
Logische Verknüpfung
– Äquivalenz 29
– Implikation 29
– Negation 29
– ODER → ODER-Funktion
– UND → UND-Funktion
– XOR → XOR-Funktion
Logistische Funktion 214, 302, 325
LTU → Linear Threshold Unit

Measure of belief 96
Measure of disbelief 96
Merkmalsreduktion 228
Mexican-Hat-Funktion 266
MinMax-Strategie 142
Mitsuku 11
Modell 33, 53
Modus ponens 36, 53
Modus tollens 37
Most general unifier 57, 160
MSE → Fehler, mittlerer quadratischer
Musterassoziator 295
Mustererkennung 207, 222, 242, 255, 290, 292, 294, 298

Nächster-Nachbar-Heuristik 130
Negation 29
Negation as failure 177
Netz
– ART- 261, 280

– Backpropagation- 306
– neuronales 305
Netzeingabe 194
Netzfehler 205, 212, 277
Neuron 192
– Ausgabe- 197
– biologisches 191
– Eingabe- 197
– hidden 197
– künstliches 191
– On- 217
– verdecktes 197
Neuronales Gas 274, 309, 311
– wachsendes 277
Neuronales Netz 189, 196, 305
– Anwendungen 222, 262
– Arbeitsweise 198
– Architektur 196, 200
– autoassoziatives 289
– Convolutional 252
– Elman- 250
– Entwicklung 198, 305
– Größe 240
– Hopfield-Netz 289
– Jordan- 248
– Optimierung 240
– partiell rückgekoppelt 247
– vollvernetzt 289
– vorwärts gerichtetes 196, 203
Normalform
– konjunktive 40

Occur-Check 161
ODER-Funktion 29
On-Neuron 217
Optimierung 240
– genetische 245
– Rundreiseproblem 269, 297
Overfitting 241

Parameterübergabe in PROLOG 158
Perzeptron 196, 203, 211, 310, 314
Plastizitäts-Stabilitäts-Dilemma 280
Pooling Layer 253, 256
Prädikat 150, 153
Prädikatenlogik 46
– Modell 53
Prädikatenlogische Formel 48
Prognose 222, 229, 247, 262
PROLOG 147
– Abarbeitung 170
– arithmetische Ausdrücke 159
– Backtracking 156, 173
– Datentypen 163, 165
– Fakten und Regeln 148, 151, 153
– logische Interpretation 162
– Negation 176
– prozedurale Interpretation 162
– Unifikation 158
– vordefinierte Prädikate 177
Propagierungsfunktion 192
Prozedurale Interpretation 162
Python 259, 305, 321

Quantifizierung 47, 49, 52
QuickProp → Backpropagation, QuickProp

Rapid Prototyping 149
RapidMiner 305
Regel 65, 75, 148
RelU-Funktion 325
Resolution 38, 54
– Korrektheit 43, 58
– Strategien 59
– Widerlegungsvollständigkeit 44, 58
Resolvente 43, 57
Restlistenoperator 165
Rezeptives Feld 244
RPROP 306, → Backpropagation, resilient
Rückwärtsverkettung 67, 71–73
Rückkopplung 197, 229, 248, 262, 289
Rundreiseproblem 126, 137, 269, 289, 298

Schlussfolgerung 10
Schlussregel → Inferenzregel
Schwellwert 194, 205, 214, 284, 291, 295
Schwellwertfunktion 193, 291
Selbstorganisierende Karte 261, 262, 267, 271, 310, 311
Self-Organizing Map 262
Semantische Äquivalenz 39
Semantische Folgerung 35, 37, 53
Semantisches Netz 81
Set-Of-Support-Strategie 59

Shortcut connection 197
Sicherheitsfaktor 92
Simulated Annealing 142, 301, 303
Simuliertes Abkühlen → Simulated Annealing
Simuliertes Ausglühen → Simulated Annealing
Skolemisierung 54
SLD-Resolution 61
Sobel-Filter 254
Softmax-Prinzip 325
SOM → Self-Organizing Map
Speicherkapazität 241, 243
Spezifität 77
Stelligkeit 164
Subsumption 60
Suche 111
– A* 133
– Bergsteiger 131
– Bestensuche 132
– Breitensuche 118
– Fairness 123
– heuristische 125
– NNH 130
– Tiefensuche 117
– uninformierte 116
– Zulässigkeit einer Schätzfunktion 137
Super-Intelligenz 20
Symbolverarbeitende KI 14, 15
Synapse 192

Tabu-Suche 143
Tautologie 32, 33, 53, 60
t-CoNorm 102
Teaching output 205, 206, 211
TensorFlow 259, 305, 321
Threshold Accepting 142
Tiefensuche 117, 119
t-Norm 101
Topic map 85
Training 198, 206, 207, 218, 219, 224, 236, 241, 242, 254, 258, 307, 326
Travelling Salesman Problem 126
Turing, Alan 8
Turing-Test 8
Türme von Hanoi 179

UND-Funktion 29, 195, 205, 208
Unerfüllbarkeit 32, 33
Unifikation 56, 57, 158
– most general unifier 57, 160
Uninformierte Suche 116
Unscharfes Wissen 87, 97
Unsicheres Wissen 88

Vages Wissen 87
Verbindungsgewicht 266, 282
Vererbung 24, 83
Verrauschen 227, 240
Vollständigkeit 38, 123
Vollvernetzte Schicht 198
Voronoi-Tesselation 275
Vorwärts gerichtetes Netz 203, 252, 280, 313
Vorwärtsverkettung 68

Wachsendes neuronales Gas 277
Wahrheitswerttabelle 30, 32, 34, 36
Wahrscheinlichkeit 88, 89
– bedingte 90
Wahrscheinlichkeitsfunktion 89
WEKA 305
Weltwissen 15
Wenn-Dann-Regel 76
Wettbewerbslernen 200, 261, 275, 280
Widerlegungsvollständigkeit 44, 58
Widerspruchsbeweis 38, 41, 54
Wiedererkennung 292, 294
Winner takes all 261, 283
Wissen
– logisches 24
– prozedurales 24
– relationales 24
– Repräsentation 15
– Verarbeitung 15
Wissensnetz 85
Wissensrepräsentation 23, 25, 27, 33
Wissensverarbeitung 23, 25, 27, 33

XOR-Funktion 30, 207, 208, 216, 307

Zeichenerkennung 222, 280
Zulässigkeit 137
Zustandsraum 115, 116, 141

KÜNSTLICHE INTELLIGENZ – KI //

- **Konzepte der künstlichen Intelligenz (KI) ganz praktisch**
- **Symbolverarbeitende künstliche Intelligenz und künstliche neuronale Netze in einem Buch**
- **Business Rules und Wissensnetze**
- **Convolutional Neural Networks und Deep Learning**
- **Übungen in PROLOG sowie mit JavaNNS und Python**
- **Extras zum Buch: www.wi.hs-wismar.de/ki-buch**

Die künstliche Intelligenz hat unseren Alltag erreicht: Wir nutzen Chatbots, reden mit Sprachassistenten, KI digitalisiert die Dokumentenverarbeitung, die Muster-, Bild- oder Objekt-Erkennung. Sie ermöglicht neue, intelligentere Lösungen in vielen Bereichen, von der Medizin bis zum autonomen Fahren.

Das Buch gibt eine Einführung in die KI. Es wird gezeigt, wie symbolverarbeitende KI in Form von Wissensnetzen oder Geschäftsregeln heute angewendet und wie künstliche neuronale Netze in der Mustererkennung oder auch im Data Mining eingesetzt werden können.

Wissensrepräsentation und -verarbeitung auf Basis der Logik wird unter Nutzung der logischen Programmiersprache PROLOG eingeführt. Logische Schlussfolgerungen lassen sich in PROLOG wesentlich leichter als in Python oder Java implementieren. Die Konzepte neuronaler Netze werden mit dem System JavaNNS und mittels Python praktisch vertieft.

Fragen und Aufgaben am Ende eines Abschnittes fordern zum aktiven Lesen und Lernen auf. Die Webseiten zum Buch enthalten Demo-Programme, die diskutierte Vorgehensweisen veranschaulichen und das Verständnis fördern.

Prof. Dr.-Ing. Uwe **LÄMMEL** und Prof. Dr. rer. nat. Jürgen **CLEVE** lehren Grundlagen der Informatik sowie künstliche Intelligenz an der Hochschule Wismar.

AUS DEM INHALT //

- **Künstliche Intelligenz**
- **Darstellung und Verarbeitung von Wissen**
- **Problemlösung mittels Suche**
- **PROLOG**
- **Künstliche neuronale Netze**
- **Vorwärtsgerichtete neuronale Netze**
- **Wettbewerbslernen**
- **Autoassoziative Netze**
- **Entwicklung neuronaler Netze**

UNSER BUCHTIPP FÜR SIE //

Frochte, Maschinelles Lernen
2019. 406 Seiten. Broschur. € 38,00.
ISBN 978-3-446-45996-0

HANSER

€ 29,99 [D] | € 30,90 [A]
ISBN 978-3-446-45914-4